Gekrümmte Welten und die Geschwindigkeit der Galaxien hinter dem Horizont

Prof.Dr.Dierck-E.Liebscher, http://www.aip.de/~lie, Astrophysikalisches Institut Potsdam, 14482 Potsdam

Es ist die Krümmung der Raum-Zeit-Union, die das Schwerefeld beschreibt, nicht allein die Krümmung des Raums. Aufbauend auf der Darstellung der Krümmung von Fläche und Raum wird die gekrümmte Raum-Zeit vorgestellt und veranschaulicht.

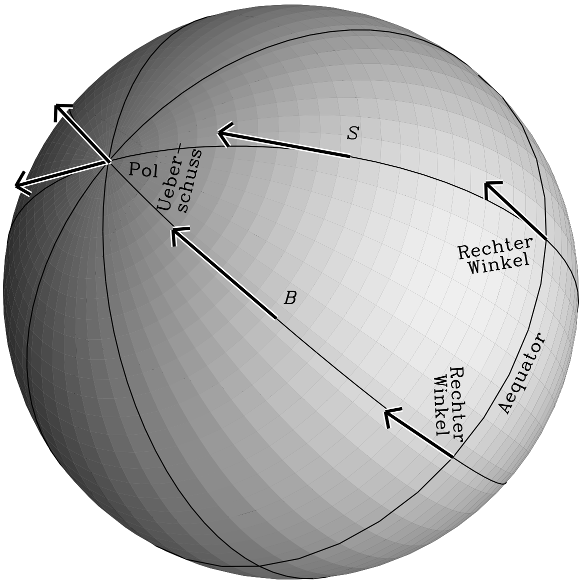

Abbildung 1: Winkelsumme und Richtungsvergleich

Wenn wir ein Dreieck aus zwei Meridianen und dem Äquator betrachten, stehen die Meridiane auf dem Äquator senkrecht. An zwei Punkten B und S sind die Nordrichtungen eingezeichnet. Verschieben wir sie an den Pol, erscheinen sie verschieden. Verschieben wir sie zum Äquator und auch um den Äquator, erscheinen sie gleich.

1. Die Nordrichtung

Sind die Nordrichtungen in Berlin und Tokyo gleich oder verschieden? Das hängt von der Prozedur des Vergleichs ab. Vergleichen wir die Nordrichtungen am Pol, sind sie verschieden, vergleichen wir sie am Äquator, scheinen sie gleich (Abb. 1). Die Erdoberfläche ist keine Ebene, sie ist gekrümmt. Betrachten wir die Erdkugel als Gebilde im Raum, und vergleichen wir die Richtungen auf der Kugelfläche wie Richtungen im Raum, sind sie verschieden. Den Vergleich von Richtungen im Razum halten wir für problemlos. Was aber, wenn der Raum auch gekrümmt ist? Was heißt Krümmung des Raums überhaupt?

Es war C.F.Gauß, dessen Todestag sich heuer zum 150. Male jährt, der entdeckt hat, dass man die dritte Dimension **nicht** braucht, um etwas über die Krümmung herauszufinden. Wir werden uns das gleich ansehen. Gauß' Entdeckung ist deshalb so wichtig, weil sein Konzept auf Räume von drei und mehr Dimensionen übertragen werden kann, ohne dass wir uns für diese Räume eine Einbettung in noch höhere Dimensionen ausdenken müssen. Die Gaußsche **innere** Krümmung kann man ohne weiteres auf dreidimensionale Räume und vierdimensionale Welten anwenden, wie das Riemann auch getan und Einstein benutzt hat.

Alles hängt am Richtungsvergleich ohne Rückgriff auf eine vermutet unproblematische Einbettung. Wir benötigen eine Prozedur des Richtungsvergleichs, zunächst für die Kugelfläche, die sich nicht auf den Raum beruft, damit wir sie dann auf höhere Dimensionen anwenden können. Diese Prozedur ist der Paralleltransport, wie er auf gekrümmten Flächen von dem chinesische Kompasswagen [2] realisiert wird. Eine Richtung wird längs einer Geodäten parallel transportiert, wenn ihr Winkel zur Geodäten unverändert bleibt. Wir werden uns das gleich ansehen. Unser Ziel ist es, die Krümmung auch der (vierdimensionalen) Union von Raum und Zeit (H.Minkowski hat sie Welt genannt) zu veranschaulichen. Wir werden sehen, dass die Richtungen in einer Welt Geschwindigkeiten darstellen und ihr Unterschied Relativgeschwindigkeiten. Der Paralleltransport von Richtungen (Geschwindigkeiten) durch eine Welt wird die Feststellung von Relativgeschwindigkeiten auch weit voneinander entfernter Objekte ermöglichen.

Die Krümmung der Welt ist Gegenstand der Allgemeinen Relativitätstheorie. Die in diesem Zusammenhang oft zitierte Krümmung des Raums ist eine untergeordnete Komponente dieser Krümmung und

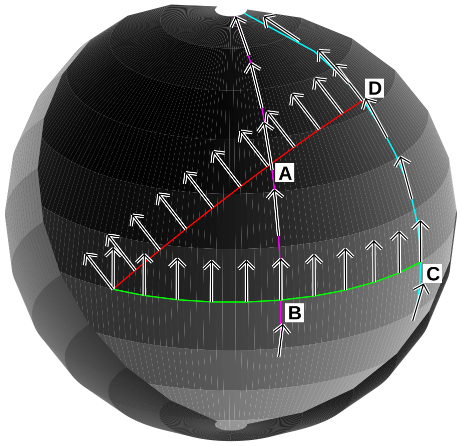

Abbildung 2: Paralleltransport um ein geodätisches Viereck auf der Kugel

Das Viereck besteht aus dem Äquator, zwei Meridianen und einer vierten Geodäte, die auch ein Großkreisbogen ist. Die Winkel bei B, C und D sich rechte Winkel. Die Nordrichtung bei A ist nach Transport über B und C nach D immer noch Nordrichtung, aber nicht mehr nach dem Transport von D zurück nach A.

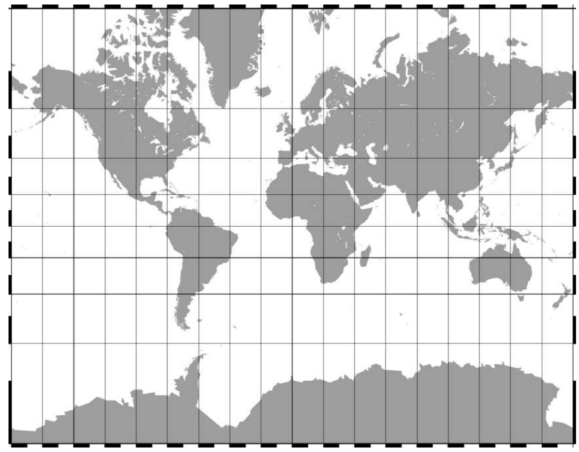

Abbildung 3: Mercator-Projektion der Erdkugel

Der Maßstab der Breitengrade hängt vom Breitengrad selbst ab. Der wirkliche Abstand zwischen zwei Meridianen nimmt – anders als auf der Karte – zu den Polen hin ab. Ist der Maßstab auf den Meridianen so gewählt, dass die Winkel an jedem Punkt der Karte mit den Winkeln auf dem Globus übereinstimmen, kann ein Kapitän mit dem Lineal die Kompassrichtung bestimmen, die ihn bei festem Kurs (d.h. auf einer Loxodromen) von Hafen zu Hafen führt.

liefert etwa für die Planetenbewegung nur minimale Effekte. Was die Planeten auf ihre Bahn zwingt, sind die Krümmungskomponenten, die die Zeit einschließen. Unser Ziel wird es sein, diese Krümmung genauer anzusehen, bis wir den Vergleich von Geschwindigkeiten über kosmische Entfernungen – bis hinter den Horizont – durchführen können.

2. Richtungsvergleich

Wir orientieren uns hier an der Kugelfläche. Wenn wir unsere für die Fläche gewonnenen Ergebnisse auf Räume und Welten anwenden oder verallgemeinern wollen, dann dürfen wir uns bei der Untersuchung der Flächen gerade **nicht** auf den dreidimensionalen Raum und die Lage im Raum berufen. Das haben wir uns schon überlegt. Wir müssen einen Paralleltransport finden und nehmen den einfachsten: Entlang einer Geodäten halten wir eine Richtung fest, indem wir ihren Winkel zum geodätischen Weg festhalten. Sehen wir uns das am Kugeldreieck von Abb. 1 an. Die Meridiane sind Geodäten und wir können die Nordrichtung des Meridians den Meridian entlang verschieben. Die Nordrichtungen können sowohl am Nordpol als auch am Äquator verglichen werden. Vergleichen wir die Nordrichtungen am Äquator, sind sie gleich, tun wir das am Nordpol, sind sie verschieden. Offensichtlich hängt das auch mit der Winkelsumme im Dreieck zusammen. Hier hat es zwei rechte Winkel (am Äquator) und noch einen am Pol. Die Summe ist größer als zwei Rechte. Der Winkel einer Richtung mit sich selbst nach einem Umlauf ist gerade so groß, wie die Winkelsumme im Dreieck den gestreckten Winkel übersteigt. Der Vergleich von Richtungen hängt auf gekrümmten Flächen, in gekrümmten Räumen und Welten von dem Weg ab, der den Vergleich vermittelt.

Bei Fahrt um eine geschlossene Kurve stellt sich also heraus, ob die Fläche gekrümmt ist: Die transportierte Richtung ist dann nicht mehr die Ausgangsrichtung, sie ist verdreht. Dabei hängt die Drehung nicht von der gewählten Ausgangsrichtung ab. Sie betrifft die Tangentialebene als Ganzes. Die Drehung, bezogen auf die umfahrene Fläche, ist das universelle

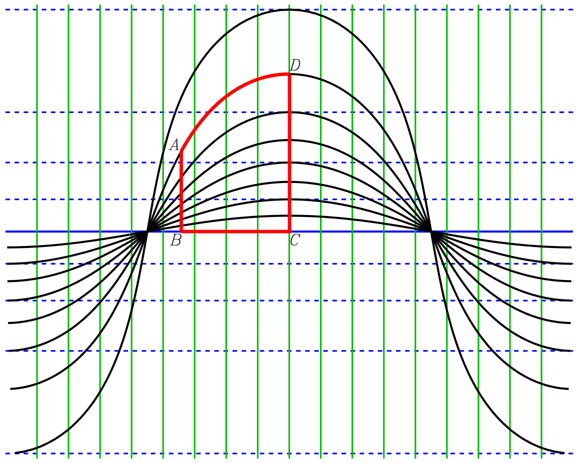

Abbildung 4: Mercator-Projektion der Geodäten

Von den geraden Linien in der Mercator-Projektion sind nur die Meridiane und der Äquator Geodäten. Die Breitenkreise sind es nicht. Kurven, die in höhere Breiten ausweichen, können kürzer werden. Wir zeichnen eine Geodätenschar, deren maximale Breite auf einem gewählten Meridian liegt. Alle anderen Geodäten erhält man wegen der Rotationssymmetrie durch horizonale Verschiebung der gezeichneten Geodäten. In der Abbildung ist ein Viereck eingezeichnet, an dem wir wieder unmittelbar sehen können, dass es drei rechte Winkel hat, der vierte (bei A) jedoch größer als ein rechter Winkel ist.

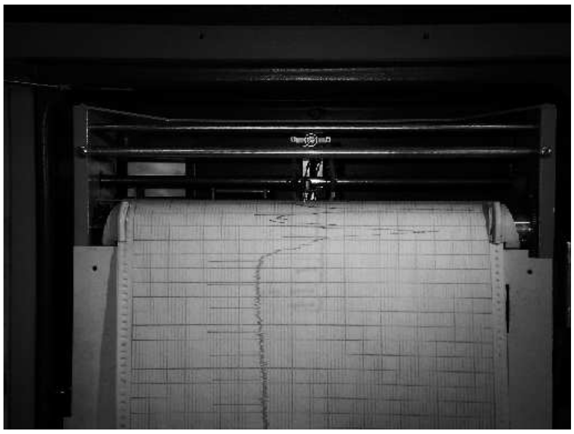

Abbildung 5: Registrierstreifen eines Radiometers

Die Bewegung der Nadeln ist als Spur dargestellt. Dieses Prinzip sehen wir im Orts-Zeit-Diagramm, wo eine Richtung die Zeit und die andere die Position darstellt. Nun denken wir uns statt der Nadeln Objekte die sich durch den Raum bewegen, speziell die Galaxien und ihre Expansionsbewegung.

Maß der Krümmung. Abbildung 2 zeigt den Paralleltransport um ein Geodätenviereck auf der Kugel, wie wir ihn im Folgenden variieren werden. Das Viereck hat drei rechte Winkel, der vierte aber ist größer. Seine Differenz zum rechten Winkel ist gerade die Drehung, die die Nordrichtung in A erfährt, wenn man sie parallel um das Viereck $ABCD$ herumführt. Damit ist die Krümmung auch in höherdimensionalen Räumen und Welten definiert, auch wenn sie dort je nach Orientierung der umfahrenen Flächenstücke verschiedene Komponenten hat.

Grundsatz: Die Krümmung erweist sich beim Paralleltransport von Richtungen um geschlossene Kurven als Drehung.

Wenn wir uns nun von der verführerischen Anschauung der Kugelfläche im Raum lösen wollen, zeichnen wir eine Karte der Kugelfläche auf einem ebenen Blatt Papier. Von der Erdoberfläche gibt es die verschiedensten Darstellungen. Eine ist für unsere Zwecke besonders geeignet. Es ist die Mercator-Projektion. Sie zeichnet sich durch Winkeltreue aus, die mit Verzerrungen bezahlt werden muss. Schauen wir uns das zunächst für die Mercator-Projektion der Erdkugel an (Abb. 3). Meridiane und Breitenkreise werden als gerade Linien dargestellt. Mercators Idee war, auch den Maßstab der Meridiane selbst so zu ändern, dass die Winkel an jedem Punkt der Karte mit den Winkeln auf dem Globus übereinstimmen. Die Geodäten (Großkreise) allerdings sind in dieser Karte **keine** Geraden (Abb. 4).

3. Die Welt

Nun kommen wir zum Gegenstand der Allgemeinen Relativitätstheorie, der Krümmung der Union von Raum und Zeit (der **Welt**). Diese Krümmung, nicht etwa die des Raums, modelliert das Schwerefeld. Hier wollen wir uns nur ansehen, wie sich diese Krümmung darstellt. Dazu müssen wir zuerst die Raum-Zeit-Union selbst darstellen, und wir tun dies in Form einer Karte, so wie wir die Erdkugel auch als ebene Karte darstellen können. Sicher hat nun auf der Karte nur noch eine Raumdimension Platz, da die zweite Richtung die Zeit darstellen muss. Eine solche Karte ist eine Art Registrierstreifen (Abb. 5),

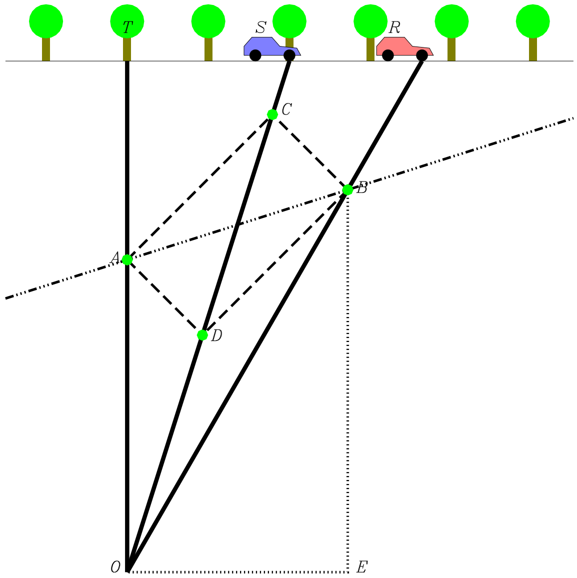

Abbildung 6: Die Konstruktion der Spiegelung auf dem Registrierstreifen

Wir konstruieren auf einem Registrierstreifen, der hier nach unten gezogen wird, die Spuren eines Baumes T und zweier Wagen R und S, die beide zu gleicher Zeit O am Baum T vorbeigefahren sind. Die Geschwindigkeit der Wagen zum Baum sind TS/OT bzw. TR/OT. Die Spuren werden als spiegelsymmetrische Situation dargestellt, wobei die Spiegelung nach Einsteins Axiom 'Lichtgeschwindigkeit bleibt Lichtgeschwindigkeit' konstruiert wird und OS die Gerade ist, an der OT gespiegelt wird. Das Spiegelbild der Richtung DA ist also DB die Spiegelung der Richtung AC ist BC. Daher ist OB das Spiegelbild von OA. Die Strecke AB ist zu sich selbst symmetrisch. Sie kennzeichnet die Lotrichtung auf OC. Die Standardkonstruktion eines Lotes nutzt solch ein Parallelogramm aus Lichtspuren (ein **Lichteck**). Die Diagonalen eines Lichtecks sind lotrecht zueinander.

ein Orts-Zeit-Diagramm.

Die geometrischen Zusammenhänge auf dem Registrierstreifen sind ein besonderes Kapitel (die spezielle Relativitätstheorie [1, 3]). Sie werden mit den Strategien der gewohnten Geometrie aus den Spiegelungen abgeleitet, die nun allerdings anders als gewohnt, aus dem Einsteinschen Axiom folgen:

Lichtgeschwindigkeit bleibt Lichtgeschwindigkeit, unabhängig von der Geschwindigkeit des Spiegels.

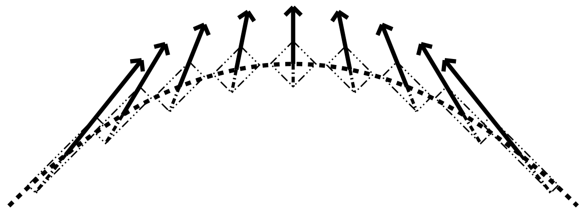

Abbildung 7: Die Lage der Lote einer Kurve auf dem Registrierstreifen

Neigungen kleiner als die der Lichtspuren bezeichnet man als zeitartig, Neigungen größer als die der Lichtspuren als raumartig. Bei einem Paar lotrechter Richtungen ist immer eine raumartig und eine zeitartig. (Die Neigung der Lichtspuren ist etwas Besonderes: Lichtspuren sind auf sich selbst senkrecht.) Bei allen Spiegelungen bleiben zeitartige Richtungen zeitartig.

Ein gegen den Recorder ruhendes Objekt zeichnet eine vertikale Spur. Ist die Spur geneigt, zeigt das die Geschwindigkeit (Abb. 6). Die Geschwindigkeit eines Objekts ist die Richtung seiner Spur auf dem Registrierstreifen. Nach Einsteins Axiom haben die von Lichtsignalen gezogenen Spuren immer die gleiche Neigung gegen die Vertikale. Man kann diese Neigung wählen, und man wählt sie so, dass man sie immer gleich erkennt, nämlich in der Schräge, die Vertikale und Horizontale nach gewohnter Vorstellung halbiert. Die Spiegelungen definieren nun lotrechte Richtungen. Auf horizontalen Geraden sind sie wie erwartet vertikal, aber auf schiefen Geraden scheinen sie zu diesen hingeneigt (Abb. 7), was wir bei der Beurteilung der Zeichnungen im Folgenden beachten müssen. Zwei Spiegelungen ergeben wie in der gewohnten Geometrie eine Drehung. Das Unerwartete an diesen Drehungen ist, dass Neigungen kleiner als die Neigung der Lichtspuren auch immer kleiner als diese bleiben. Solche Neigungen nennen wir **zeitartig**. Zeitartige Neigungen bleiben zeitartig. Wenn wir daran denken, dass die Neigungen Geschwindigkeiten darstellen, heißt das: Die Lichtgeschwindigkeit kann nicht durch wiederholte Beschleunigung überschritten werden. Das ist im Folgenden auch der Grund, weshalb die Geschwindigkeiten der Galaxien beim Paralleltransport zum Ort ihres Vergleichs immer kleiner als die Lichtgeschwindigkeit bleiben müssen.

Ein Paar lotrechter Richtungen bleiben bei Spiegelungen lotrecht. Ein weiterer Punkt: Aus dem Ein-

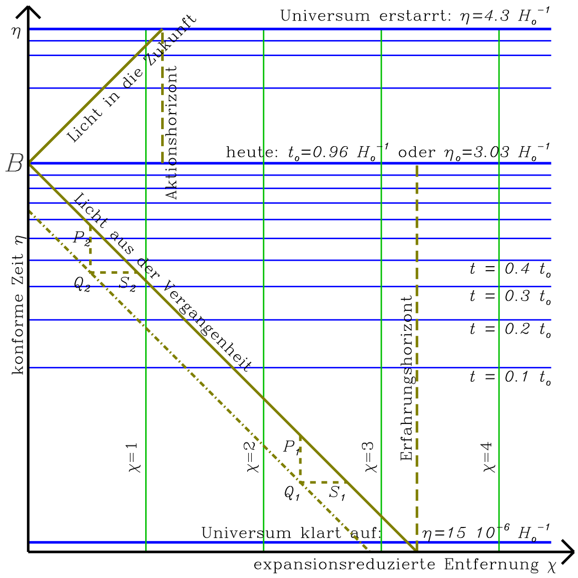

Abbildung 8: Karte des expandierenden Universum in Mercator-Projektion

Das Universum hat sowohl einen Erfahrungshorizont als auch einen Aktionshorizont, weil die Konformzeit sowohl einen Anfang als auch ein Ende hat.
Das bei B ankommende Lichtsignal hat einen Vorläufer (strichpunktiert). In der Karte bleiben räumliche und zeitliche Distanz fest ($Q_1S_1 = Q_2S_2$ und $Q_1P_1 = Q_2P_2$). Wegen des sich ändernden Maßstabs heißt das: Der richtige Abstand in Zeit wie in Raum nimmt mit der Expansion ständig zu. Das spiegelt sich nachprüfbar in der zunehmenden Wellenlänge eines Photons (Rotverschiebung der entfernten Galaxien) ebenso wie in der Verringerung der Frequenz einer Photonenfolge (z.B. der Verringerung der Abklingrate einer Supernova).

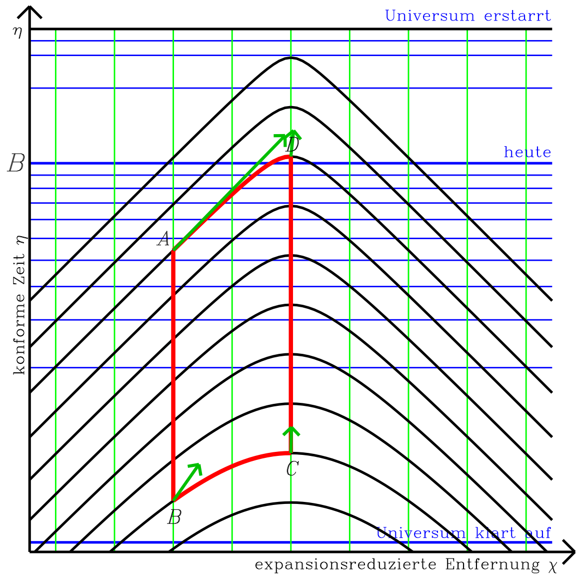

Abbildung 9: Geodäten in der Mercator-Projektion eines expandierenden Universums

Von den geraden Linien in der Mercator-Projektion sind nur die Linien konstanter mitbewegter Koordinate längste Linien. Die Linien fester Zeit sind es nicht. Kurven, die in spätere Zeiten ausweichen, sind länger. Alle anderen Geodäten erhält man wegen der Rotationssymmetrie durch horizonale Verschiebung der gezeichneten Geodäten.

steinschen Axiom kann man ableiten, dass in der Orts-Zeit-Ebene Umwege unerwarteterweise **kürzer** als die direkten Verbindungen sind. Geodäten in der Orts-Zeit-Ebene sind nicht kürzeste, sondern längste Verbindungen. Dies brauchen wir hier allerdings nur, um die Form der Geodäten im expandierenden Universum einzusehen.

4. Das Universum

Wir wollen die Krümmung der Welt exemplarisch am expandierenden Universum darstellen. Wir wissen, dass die Galaxien sich im Mittel von uns entfernen, und zwar um so schneller, je weiter sie schon entfernt sind. Wir messen das an einer Verschiebung der Spektrallinien ins Langwellige, die mit einem Doppler-Effekt verglichen werden muss. In einer bestimmten Entfernung wächst die Rotverschiebung über alle Schranken und indiziert Bewegung mit Lichtgeschwindigkeit. Was geschieht jenseits dieser Entfernung? Gibt es da Überlichtgeschwindigkeit?

Wenn wir uns an zwei Galaxien orientieren wollen, dann ist der Schlag der konformen Zeit die Ankunft eines zwischen diesen Galaxien hin und her laufenden Lichtsignals. Die Konformzeit zeigt so etwas wie die „biologische“ Uhr des Universums. In konformer Zeit hat das Universum eine endliche Lebensdauer. In ferner Zukunft kann sehr viel Zeit vergehen, ohne dass noch etwas geschieht, weil zwischen den Nachbarn keine Signale mehr die Distanzen überbrücken können. Auch wenn die Atomzeit bis ins Unendliche läuft, der Herzschlag des Universums kommt zum Stehen. Um die Krümmung ablesbar zu machen, zeichen wir analog zu Abb. 4 eine Schar (raumartiger) Geodäten. Auch die raumartigen Geodäten enden

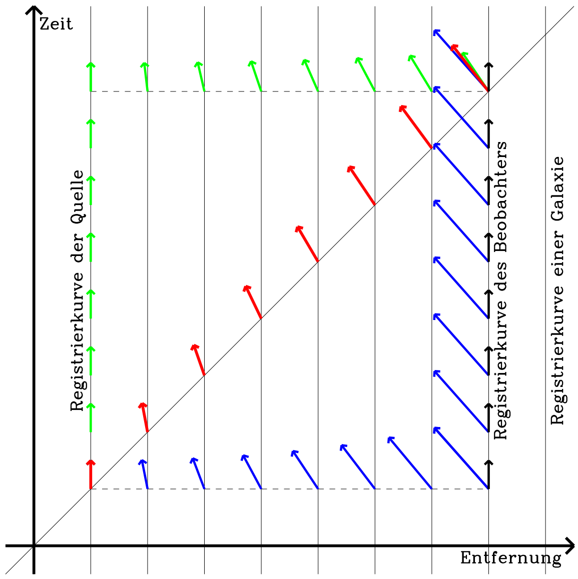

Abbildung 10: Drei Wege zum Transport des Geschwindigkeitsvektors einer beobachtbaren Galaxie

Gezeichnet ist eine Mercator-Karte des Einstein-deSitter-Modells. Drei Wege von der Quelle zum Beobachter werden verglichen und zeigen verschiedene Ergebnisse, weil die Union von Raum und Zeit gekrümmt ist (auch wenn der Raum selbst hier nicht gekrümmt ist).

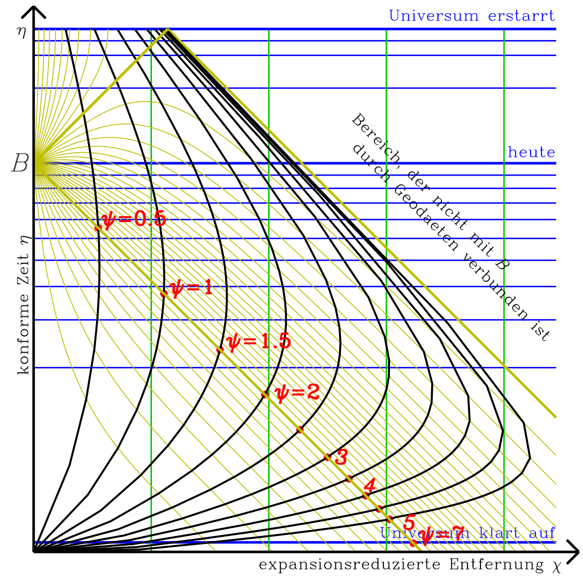

Abbildung 11: Relativgeschwindigkeiten der Galaxien im Universum

Dies ist eine Karte der Funktion $\psi = \mathrm{Arth}[v/c]$ der Relativgeschwindigkeit für das Standardmodell von 2004. Der Transport wird entlang der Geodäten geführt, die das jeweilige Ereignis mit B verbinden.

auf dem unteren Rand, und so gibt es keinen Äquator. Dennoch fällt an dem eingezeichneten Geodätentrapez die Abweichung der Winkel von den euklidischen Verhältnissen ins Auge. Das Ergebnis eines Paralleltransports hängt wie zu sehen vom Wege ab. Damit können wir uns auf verschiedene Transportvorschriften zur Festlegung einer reproduzierbaren Relativgeschwindigkeit einigen (Abb. 10). Die Form der Geodäten hängt nur vom Zeitpunkt ihres Scheitels ab. Sie können horizontal ebenso verschoben werden wie die Geodäten in der Mercator-Projektion der Erde. Die Rotationssymmetrie der Kugel bildet sich in ihren geographischen Koordinaten in gleicher Weise ab wie die Homogenität des Universums in dessen Mercator-Koordinaten.

Die Tangenten an die Meridiane sind nun die Geschwindigkeiten der Galaxien, deren Registrierkurven gerade die Meridiane sind. Man sieht: Der Paralleltransport um eine geschlossene Kurve liefert wieder eine Drehung. Diese Drehung indiziert die Krümmung der Raum-Zeit. Können wir zwei Geschwindigkeitsvektoren an einem Punkt vergleichen, ist die Differenz gerade die Relativgeschwindigkeit.

Das reale Universum hat eine etwas andere Maßstabsverteilung, aber qualitativ bleibt alles wie vorgestellt. Zunächst nehmen die Abstände ständig zu. Die Existenz des unteren Randes ist nun dem Anfang der Zeit geschuldet (Abb. 8). Besonders nahe liegt es, für den Transport des Geschwindigkeitsvektors einer eben beobachteten Galaxie eben den Weg in der Karte zu wählen, den das Licht selbst zurücklegt. Dieser Transport liefert nun eine Relativgeschwindigkeit, die man gerade aus der Rotverschiebung nach der gewohnten speziell-relativistischen Formel berechnet.

Transportieren wir den Geschwindigkeitsvektor einer Galaxie quer durch das Universum zu einer anderen, ergibt sich eine Relativgeschwindigkeit, zu der bereits ohne Rechnung festgestellt werden kann, dass sie **immer** kleiner als die Lichtgeschwindigkeit ist, Horizont hin oder her. Das Ergebnis der Transporte längs der Geodäten zu einem bestimmten Aufpunkt (hier und heute) ist in Abbildung 11 zu sehen. Jenseits des auf Geodäten zugänglichen Bereichs finden wir so naturgemäß keine Werte, und der Rand des Bereichs signalisiert Lichtgeschwindigkeit. Die Methode des Transports längs der Geodäten ist aber nur eine der möglichen: Der Transport längs der Linien fester Zeit erreicht alle Ereignisse, und nirgendwo wird Lichtgeschwindigkeit erreicht. Die messbaren Relativgeschwindigkeiten sind ohnehin nur die zu den Galaxien, von denen wir bereits Licht erhalten, und von diesen wieder nur zu Zeiten, von denen wir eben erst das Licht erhalten. Diese Zeiten werden angedeutet durch den Schnitt der Registrierkurven der heute ankommenden Lichtsignale mit denen der entfernten Galaxien. Die Schnitte wieder enden zum Anfang der Zeit, wo sie den Horizont definieren. Die Relativgeschwindigkeit erreicht Lichtgeschwindigkeit am Horizont, das ist aber eben kein Ort, sondern ein Zeitpunkt. Vor diesem Zeitpunkt gibt es nichts zu beobachten, und nach diesem Zeitpunkt ist der Transport ganz normal und liefert nur Unterlichtgeschwindigkeit.

Literatur

[1] Liebscher, D.-E. (1999): *Einsteins Relativitätstheorie und die Geometrien der Ebene*, Teubner, Leipzig.

[2] Liebscher, D.-E. (1999): Mit dem Kompasswagen über den Globus, *Der Mathematisch-Naturwissenschaftliche Unterricht* **52**, 140-144.

[3] Liebscher, D.-E. (2005): Der kürzeste Weg zu $E = mc^2$, *Praxis der Naturwissenschaften Physik in der Schule* **54**, 11-17.