Die Eddingtonleuchtkraft

Bastian Arnold*

21. April 2005

Inhaltsverzeichnis

*e-mail: barnold@rz.uni-potsdam.de

1 Motivation für die Eddington-Leuchtkraft

- von großer praktischer Bedeutung, da viele Systeme eine Leuchtkraft $L \approx L_{Edd}$ besitzen
- spielt eine große Rolle bei Objekten mit Akkretion:
  - Abschätzung der kritischen Akkretionsrate
  - Angabe einer oberen Grenze für die Akkretions-Leuchtkraft
  - Bestimmung der Zeitskala des Wachstums des Objekts

2 Zwei wichtige Definitionen

Strahlung (auch: bolometrischer Fluss): ist die gesamte durch elektromagnetische Strahlung abgegebene Leistung pro Flächeneinheit, d.h. integriert über das gesamte Frequenzspektrum

$$S(z) = \int_{\nu=0}^{\infty} S_\nu(\nu, z)\mathrm{d}\nu \qquad , \ [S] = \frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{cm^2 s}}$$

Leuchtkraft: ist die über die Oberfläche eine Kugel mit Radius R integrierte Strahlung, d.h.

$$L = 4\pi R^2 S \qquad , \ [L] = \frac{\mathrm{erg}}{\mathrm{s}}$$

3 Ableitung der Eddington-Leuchtkraft

Definition: Die Eddington-Leuchtkraft/ das Eddington-Limit L_{Edd} ist die (theoretische) Obergrenze der Leuchtkraft eines stabilen Objekts, welches seine Energie durch Umwandlung von Wasserstoff zu Helium gewinnt.

Korollar: Für $L = L_{Edd}$ gilt an der Oberfläche des Objekts

$$\text{Strahlungsbeschleunigung} = \text{Gravitationsbeschleunigung}$$

- zu zeigen: $g_{radial} = g_{grav}$
- Annahmen:
  1) auf der Oberfläche sei hauptsächlich ionisierter Wasserstoff H^+
  2) konstante, sphärisch symmetrische Masseverteilung auf der Oberfläche
- Herleitung von g_{radial}
  - Strahlungsbeschleunigung = Impulsübertrag (durch Streuung, Absorption) pro Zeitintervall auf eine Einheitsmasse
  - durch Annahme 1) wirkt der Impuls vorwiegend auf die Elektronen durch Thomson-Streuung (Wirkungsquerschnitt WQ = σ_T), da der WQ der Protonen $\sigma_P \ll \sigma_T$
    $[\sigma_P \propto (m_e/m_p)^2 \sigma_T,\ m_e/m_p \approx 5 \cdot 10^{-4},\ \sigma_T \approx 6,7 \cdot 10^{25}\mathrm{cm}^2]$
  - sei L die Leuchtkraft des Objekts, so folgt mit Annahme 2), dass

$$L = 4\pi R_*^2 S \tag{1}$$

- sei S der Strahlungsstrom und σ_T der WQ der Thomson-Streuung, dann gilt:

  radial nach außen gerichtete Kraft auf jedes Elektron = Impulsübertragungsrate auf dieses Elektron

$$\begin{aligned} \Longrightarrow F_{radial} &= \frac{\sigma_T S}{c} \\ \Longleftrightarrow g_{radial} &= \frac{\sigma_T S}{m_p c} = \frac{\sigma_T L}{4\pi R_*^2 m_p c} \end{aligned} \tag{2}$$

- falls andere Elemente existieren als H^+ kann σ_T überschritten werden
- dabei sorgt die Coulomb-WW dafür, dass die Protonen mit den Elektronen als Paare durch F_{radial} einen Impuls radial vom Objekt weg erfahren
- nun ist F_{radial} anti-parallel gerichtet zu

$$F_{grav} = \frac{GM_*(m_p + m_e)}{R_*^2} \approx \frac{GM_* m_p}{R_*^2}$$

- damit ist die Nettokraft F_N auf ein Elektron-Proton-Paar

$$F_N = F_{grav} - F_{radial} = \left(GM_* m_p - \frac{\sigma_T L}{4\pi c} \right) \frac{1}{R_*^2}$$

- für $F_N = 0$ gilt

$$\boxed{L = \frac{4\pi G M m_p c}{\sigma_T} =: L_{Edd}} \qquad \left(\approx 1{,}3 \cdot 10^{38} (M/M_\odot) \mathrm{s}^{-1} \mathrm{erg}\right)$$

4 Eddington-Leuchtkraft und Akkretion

- für festen Wert M/R_* hängt L eines akkretierenden Objekts von der Rate $\dot{m}$ ab
- bei hinreichend hohen L wird die Akkretion beeinflusst durch den Impulsübertrag $\Longrightarrow$ maximale L für geg. Masse M, ie. $L = L_{Edd}$
- Herleitung analog zu s.o., falls akkretiertes Material die Annahmen 1) und 2) erfüllt
- bei Abweichung von sphärischer Symmetrie:
  geschieht die Akkretion auf einen Bruchteil ε der Oberfläche, so gilt einfach $\tilde{L}_{Edd} = \varepsilon L_{Edd}$
- desweiteren gibt L_{Edd} für akkretierende Objekte eine obere Schranke für die konstante Akkretionsrate $\dot{m}$ an:
  falls alle E_{kin} der akkretierten Materie an der Oberfläche durch die Strahlung kompensiert ist, dann ist die Akkretions-Leuchtkraft (Leuchtkraft, die die nötige Energie aus der Akkretion erhält)

$$L_{acc} = \frac{GM}{R_*^2} \dot{m} \leq L_{Edd} \tag{3}$$

- da die Strahlungsbeschleunigung die Akkretion bremst, ist eine Abschätzung für die kritische Akkretionsrate

$$\dot{m}_{Edd} = \frac{L_{Edd}}{\eta c^2} \tag{4}$$

5 Herleitungen

5.1 Herleitung von Gleichung (1)

Annahme: sphärische Symmetrie

$$L = \int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{\vartheta=-\pi}^{\pi} R_*^2 \sin\vartheta \mathrm{d}\vartheta \int\limits_{\nu=0}^{\infty} S_\nu \mathrm{d}\nu = 4\pi R_*^2 S$$

5.2 Herleitung von Gleichung (2)

Betrachte ein Elektron-Proton-Paar. Dann ist die Strahlungsbeschleunigung

$$F_{rad} = m g_{rad} = \dot{p} \Longleftrightarrow g_{rad} = \frac{\dot{p}}{m}$$

Da F_{rad} konservativ $\exists$ Potenzial

$$E_{rad} = -\int F_{rad}\mathrm{d}r \quad \Longrightarrow \quad \dot{E}_{rad} = -\int F_{rad}\mathrm{d}v = -F_{rad}\Delta v = -F_{rad}c$$

Da die Gravitation auch konservativ ist, existiert auch hier ein Potenzial

$$E_{grav} = \frac{GM_* m_p}{R_*} \quad \Longrightarrow \quad \dot{E}_{grav} = \frac{GM_*}{R_*}\dot{m}_p$$

Es ist E_{grav} der Energiegewinn auf Kosten der Gravitation, wenn eine Masse m_p bis zur Oberfläche R_* gelangt. Bei einem nach innen gerichteten Massenstrom der Rate $\dot{m}_p$ ist $\dot{E}_{grav}$ identisch mit der in Strahlung umgewandelten Energie, also der Leuchtkraft L, ie.

$$\dot{E}_{grav} = \frac{GM_*}{R_*}\dot{m}_p = L$$

Da nun gelten soll, dass die Änderung $\dot{E}_{grav}$ der Gravitationsenergie identisch ist mit der negativen Änderung $\dot{E}_{rad}$ der Strahlungsenergie durch Impulsübertrag, folgt

$$\begin{aligned} \dot{E}_{grav} &= -\dot{E}_{rad} \\ \frac{GM_*}{R_*}\dot{m}_p &= F_{rad}c = L = 4\pi r^2 S \end{aligned}$$

Da wir hier nur ein Paar betrachten und die Thomson-Streuung, so ist r der Radius des WQ σ_T und somit $\sigma_T = 4\pi r^2$. Es folgt aus der letzten Zeile

$$m_p g_{rad} = F_{rad} = \frac{\sigma_T S}{c} \quad \Longleftrightarrow \quad g_{rad} = \frac{\sigma_T S}{m_p c} = \frac{\sigma_T L}{4\pi R_*^2 m_p c}$$

Anmerkung: Die Größe des Wirkungsquerschnitts $\sigma_T = 4\pi r^2$ ist klassisch nicht einleuchtend. Die quantenmechanische Berechnung von σ_T liefert den vierfachen, und damit den richtigen, Wert der Fläche einer Kreisscheibe πr^2.

5.3 Herleitung von Gleichung (3)

Es ist

$$E_{grav} = \frac{GM_* m_p}{R_*}$$

der Energiegewinn auf Kosten der Gravitation, wenn eine Masse m_p bis zur Oberfläche R_* gelangt. Bei einem nach innen gerichteten Massenstrom der Rate $\dot{m}_p$ ist $\dot{E}_{grav}$ identisch mit der in Strahlung umgewandelten Energie, also der Leuchtkraft L_{acc}, ie.

$$\dot{E}_{grav} = \frac{GM_*}{R_*}\dot{m}_p = L_{acc}$$

Da für ein stabiles Objekt mit L gelten muss $L \leq L_{Edd}$, folgt also $L_{acc} \leq L_{Edd}$.

5.4 Herleitung von Gleichung (4)

$$\dot{E} = L \quad \Longleftrightarrow \quad E = L\Delta t$$

mit Δt = Lebenszeit der Quelle.
Weiterhin

$$E = Mc^2 \quad \Longrightarrow \quad Mc^2 = L\Delta t \quad \Longleftrightarrow \quad \dot{M} = \frac{L}{c^2}$$

Wird nur ein Bruchteil der akkretierten Materie in Strahlung umgewandelt, folgt mit einer gewissen Effizienz $\eta \leq 1$

$$E = \eta Mc^2 \quad \Longrightarrow \quad \dot{M} = \frac{L}{\eta c^2}$$

Für $L = L_{Edd}$ erreicht die Akkretionsrate ihren kritischen Wert und es gilt mit einer angenommenen Effizienz $\eta \approx 0,1$

$$\begin{aligned} \dot{M}_{Edd} = \frac{L_{Edd}}{\eta c^2} \quad &\approx \quad 10^{26} \left(\frac{M}{10^8 M_\odot} \right) \left(\frac{\eta}{0,1} \right)^{-1} \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{s}} \\ &\approx \quad 2 \left(\frac{M}{10^8 M_\odot} \right) \left(\frac{\eta}{0,1} \right) \frac{\mathrm{M}_\odot}{\mathrm{yr}} \end{aligned}$$