Ein nichtlineares Dynamomodell mit magnetfeld-abhängigem EMF-Koeffizienten

DIPLOMARBEIT

bei Herrn Professor Dr. Erwin Sedlmayr
am Fachbereich Physik der Freien Universität Berlin
in Kollaboration mit
Herrn Professor Dr. Günther Rüdiger
am Astrophysikalischen Institut Potsdam
vorgelegt von

RAINER ARLT

Potsdam, im Juni 1997

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Beobachtete Magnetfelder und differentielle Rotation **3**
2.1 Messung von Magnetfeldern 3
2.2 Das Sonnenmagnetfeld 4
2.3 Galaktische Magnetfelder 6
2.4 Differentielle Rotation in Galaxien 7
2.5 Differentielle Rotation der Sonne 8

3 Die Dynamotheorie **11**
3.1 Der $\alpha^2\Omega$-Dynamo 11
3.2 Herleitung des verwendeten Modells 13
3.2.1 Induktionsgleichung 14
3.2.2 Rückwirkung des Magnetfelds auf die Turbulenz 16
3.3 Wertebereiche für C_α und C_Ω 20

4 Numerische Umsetzung des Modells **23**

5 Ergebnisse **25**
5.1 Parität der Lösungen 25
5.2 $\alpha^2\Omega$-Dynamo mit $1/(1+B^2)$-Quenching 29
5.3 Anfangsfeld aus Kontraktion 32
5.4 Eingebettete Galaxie 35
5.5 Zusammenfassung 41

6 Programm **43**

Literaturverzeichnis **49**

Kapitel 1

Einleitung

Die Entstehung von Magnetfeldern wird in vielen astronomischen Objekten beobachtet. Seit langem ist der etwa 22jährige Magnetfeldzyklus der Sonne bekannt. An ihn ist auch die Sonnenfleckenaktivität in der Photosphäre gebunden, die bereits seit einigen hundert Jahren beobachtet wird. Auch das Erdmagnetfeld ist nicht stationär, wenngleich es weit weniger periodisch als die Sonnenaktivität ist.

Magnetfelder solcher Körper, die aus der Kontraktion von Materie entstanden sind, können das Ergebnis der Verdichtung schwacher, ausgedehnter Magnetfelder sein. Diese Verstärkung reicht allein aber nicht, da die Felder aufgrund dissipativer Vorgänge schnell verschwinden. Wir benötigen daher einen sogenannten Dynamomechanismus, der Magnetfelder beobachtbarer Stärken aufrechterhalten kann. Ziel der folgenden Überlegungen ist es daher, Dynamomodelle mit oszillierenden oder stationären Lösungen zu finden, deren Anfangsfelder Stärken aufweisen, wie sie bei der Kontraktion von Materie zu Galaxien oder Sternen auftreten.

Im folgenden Kapitel werden die wichtigsten Beobachtungsergebnisse von Bestimmungen der Magnetfelder von Sternen und Galaxien zusammengefaßt. Da die Verstärkung und Richtung von Magnetfeldern eng mit der differentiellen Rotation der Objekte verbunden ist, sind die beobachteten Rotationskurven in zwei weiteren Abschnitten beschrieben. In Kapitel 3 wird das Dynamomodell mit seiner Ableitung aus der magnetohydrodynamischen Mean-Field-Theorie erläutert. Dabei wird insbesondere auf die Art der hier verwendeten Nichtlinearitäten eingegangen. Die sinnvolle Wahl der Steuerungsparameter des Modells bildet den Anschluß zu Beobachtungen von Magnetfeldern in Sternen und Galaxien. Kapitel 4 befaßt sich mit der numerischen Umsetzung eines eindimensionalen Dynamomodells einschließlich kurzen Struktur- und Stabilitätsuntersuchungen. Die Resultate der numerischen Integration des Modells sind in Kapitel 5 angegeben.

Mein Dank gilt vor allem Herrn Professor Dr. Erwin Sedlmayr vom Institut für Astrophysik der TU Berlin für die Ermöglichung dieser Arbeit in Kollaboration mit dem Astrophysikalischen Institut Potsdam (AIP). Für die unzähligen Anregungen und Hinweise bedanke ich mich herzlich bei meinen Betreuern Herrn Professor Dr. Günther Rüdiger und

Herrn Dr. Detlef Elstner vom AIP, die mir bei allen Fragen zur Seite standen und mich durch die Einbeziehung in die aktuelle Forschung sehr motivierten. Ich bedanke mich bei Herrn Dr. Leonid Kitchatinov (Irkutsk) für die anregenden Disussionen zu den Dynamomodellen und bei allen Kollegen und Kolleginnen, die die angenehme Atmosphäre im AIP schufen.

Kapitel 2

Beobachtete Magnetfelder und differentielle Rotation

2.1 Messung von Magnetfeldern

Eine sehr präzise Methode zur Messung von Magnetfeldern im allgemeinen ist die Ausnutzung des Zeeman-Effekts in Emissions- oder Absorptionslinien. Die Messung der Zeeman-Aufspaltung ist in der Tat die wichtigste Methode zur Messung solarer Magnetfelder. Mit hoher räumlichen Auflösung können die Felder der Sonne kartiert werden. Allerdings sind die optischen Methoden auf die Oberfläche der Sonne begrenzt – auf die inneren Felder, die die magnetische Aktivität an der Oberfläche erzeugen, kann man nur indirekt schließen.

Für die Bestimmung von galaktischen Magnetfeldern ist diese Nutzung der Zeeman-Aufspaltung ungeeignet, da die zu messenden Felder viel zu schwach sind. Der theoretische Abstand der Linienkomponenten beträgt bei HI-Wolken 2.8 Hz pro Mikrogauß (μG). Die Aufspaltung der OH-Linie ist mit 3.8 Hz/μG nicht viel größer. Zu der geringen Aufspaltung der Linien kommt ihre Dopplerverbreiterung durch sich unterschiedlich bewegende Objekte im Meßausschnitt. Bei Messungen an der Sonne können sehr kleinskalige Magnetfelder bestimmt werden – die Dopplerverbreiterung stellt hier kein Problem dar.

Eine zweite Methode ist die Messung optischer Polarisation. Die Idee ist, daß abgeplattete Staubteilchen sich im Magnetfeld ausrichten und so zu einer Polarisation des Lichts führen, die die Richtung des Magnetfeldes anzeigt. Die Bestimmung der Feldstärke erfordert zusätzlich eine Äquipartitions-Annahme; es wird angenommen, daß die Energiedichte der kosmischen Strahlung gleich der des magnetischen Feldes ist.

Bei niedrigen Frequenzen kommt der größte Teil der beobachteten Radiostrahlung aus Synchrotron-Strahlung, die stark polarisiert ist. Die Richtung des Magnetfeldes wird aus der Polarisationsrichtung gewonnen, die allerdings durch Faraday-Drehung durch in der Sichtlinie liegende heiße Medien eine Mißweisung haben kann. Linear polarisiertes Licht kann in einen links- und einen rechtszirkular polarisierten Anteil zerlegt werden.

Passiert die Strahlung ein magnetisiertes Medium, haben die beiden Anteile verschiedene Phasengeschwindigkeiten. Nach Verlassen des Mediums hat das resultierende linear polarisierte Licht eine andere Polarisationsrichtung als vorher. Da die Faraday-Drehung frequenzabhängig ist, kann man sie durch Messung bei verschiedenen Frequenzen eliminieren. Die Bestimmung der Stärke der Magnetfelder erfordert auch hier wieder eine Äquipartitions-Annahme. Eine Relation zwischen der Energiedichte der relativistischen Elektronen aus der kosmischen Strahlung und der Energiedichte der Magnetfelder muß vorausgesetzt werden. Leider läßt sich die kosmische Strahlung nur in Erdnähe messen. Beobachtungen von Gamma-Strahlen liefern die Verteilung der hochenergetischen Elektronen der kosmischen Strahlung in der Milchstraße. Die Äquipartitions-Annahme ist berechtigt, falls Gamma- und Radioemission aus den gleichen Qellen stammen.

Umgekehrt kann man die Faraday-Drehung der Polarisationsrichtung von Radiostrahlung auch nutzen, um intergalaktische Feldstärken abzuschätzen. Ein fernes Radioobjekt dient als Sonde, um die Magnetfelder zwischen Galaxien zu bestimmen, doch ist die Elimination der Polarisationsdrehung von ferner Galaxie und Faraday-Drehung in der eigenen Galaxis sehr kompliziert und führt nur auf grobe Schätzwerte für intergalaktische Magnetfelder.

Umfassende Übersichten zur Messung von galaktischen Magnetfeldern findet man in Wielebinski & Krause (1993) und Beck et al. (1996).

2.2 Das Sonnenmagnetfeld

Seit einigen Jahrhunderten werden auf der Sonnenoberfläche Flecken beobachtet – sie sind Ausdruck solarer Aktivität, in ihnen tritt das sonst in der Konvektionsschicht der Sonne verborgene Magnetfeld aus der Oberfläche der Sonne, der Photosphäre, heraus. Die Häufigkeit der Sonnenflecken ist nicht konstant, sondern variiert in einem 11jährigen Zyklus. Die Magnetfelder, die aus den Flecken austreten, haben Feldstärken von mehreren kG. Die Polarität des Feldes in Fleckengruppen – man unterscheidet bipolare und unipolare Fleckengruppen – folgt bestimmten Gesetzmäßigkeiten, den Haleschen Polaritätsregeln. Obwohl die optische Häufigkeit der Flecken sich nach 11 Jahren etwa wiederholt, ist dann ihre Polarität aber entgegengesetzt, so daß auch das Magnetfeld im Innern umgekehrtes Vorzeichen haben muß. Der komplette Magnetfeldzyklus dauert daher 22 Jahre.

Darüberhinaus ist das Sonnenmagnetfeld ein Dipolfeld. Das bedeutet, daß das toroidale Feld (B_φ) auf den beiden Hemisphären der Sonne entgegengesetztes Vorzeichen hat. Eine weitere interessante Eigenschaft des Sonnenmagnetfeldes ist seine zeitliche Verteilung über die heliographische Breite. Kurz nach dem Sonnenfleckenminimum treten die ersten Flecken in sehr hohen Breiten auf. Später beschränkt sich das Auftreten der Flecken auf immer niedrigere Breiten, bis die letzten Flecken kurz vor dem nächsten Minimum nach etwa 11 Jahren nur noch unter $\pm 10^\circ$ heliographischer Breite auftreten. Es ist daher anzunehmen, daß das in der Konvektionszone verborgene großskalige Magnetfeld

Abbildung 2.1: *Schmetterlingsdiagramm der Sonnenfleckenverteilung in den Jahren 1945 bis 1990 nach Harvey (1992). Die unteren Pfeile geben die Zeitpunkte des Fleckenminimums, die oberen Pfeile die Sonnenfleckenmaxima an.*

ebenfalls diese zeitliche Breitenverteilung zeigt. Abbildung 2.1 zeigt die Sonnenfleckenverteilung über 45 Jahre, also 4 Fleckenzyklen. Die Form der entstehenden schwarzen Flächen gaben der Darstellung den Namen „Schmetterlingsdiagramm“.

Über diese sehr prominente Zyklusperiode hinaus wurden langdauernde Schwankungen der Sonnenaktivität beobachtet. Die Angaben über die Zyklusdauer sind aber sehr unsicher; es werden Werte zwischen 80 und 100 Jahren angegeben. Die erste weitere Periodizität wurde von Kopecky (1978) mit 80 Jahren angegeben; sie bezieht sich auf die Lebensdauer der Sonnenflecken. Noch vagere Untersuchungen aus der Häufigkeit von ^{14}C in der Erdatmosphäre führen sogar zu einer 2400jährigen Periode (Hood & Jirikowic 1990). Nach Feynman et al. (1990) variiert Sonnenaktivität nicht streng nach dem inzwischen zu 88 Jahren bestimmten Zyklus, sondern pendelt in einem Übergangsstadium zwischen Periodenverdopplung und chaotischem Verhalten. Da auch nichtlineare Dynamomodelle chaotisches Zeitverhalten liefern können, ist diese Tatsache ein wichtiger Aspekt für die Simulation stellarer Magnetfelder.

Bei anderen Sternen ist die Messung von Rotation und Aktivitätszyklus sehr viel

schwieriger. Geringe Helligkeitsvariationen und insbesondere die Messung der Intensität der für aktive Regionen typischen H- und K-Linien des CaII zeigen zwei Perioden, von denen die kurze als Rotationsperiode gedeutet wird, die lange dagegen als Aktivitätszyklus. Saar & Baliunas (1992) bestimmten die Rotations- und Aktivitätsperioden von 99 sonnenähnlichen Sternen. Die Aktivitätszyklen haben Längen zwischen 5 und 25 Jahren, die Rotationsperioden zwischen 10 und 50 Tagen. Keine Abhängigkeiten des Aktivitätszyklus von der Roatationsperiode, dem Spektraltyp oder der Leuchtkraft wurden gefunden.

2.3 Galaktische Magnetfelder

Die Feldstärke des großskaligen Magnetfeldes der Milchstraße beträgt zwischen 1 und 10 μG. In Sonnenumgebung, also bei einem Abstand vom galaktischen Zentrum von 10 kpc, liegt die Feldstärke bei etwa 2 μG. Vergleichbare Galaxien zeigen ähnliche Werte – Messungen an M51 ergaben Feldstärken zwischen 5 und 10 μG (Berkhuijsen et al. 1996). Eine typische Eigenschaft galaktischer Magnetfelder ist das Verhältnis von radialer zu azimutaler Feldkomponente (B_r und B_φ). Die als Pitchwinkel bezeichnete Neigung der Feldlinien zur reinen φ-Richtung beträgt bei M51 nach Berkhuijsen et al. (1996) $-11^\circ \pm 3^\circ$ für den Bereich 3–6 kpc Radius und nimmt nach außen hin leicht ab. Die Pitchwinkel für weitere Galaxien (z.B. M31, M33, M81, M83, IC342, NGC6946: Beck 1993) liegen alle im Bereich -15° bis -35° bei Radien zwischen 5 und 10 kpc. Die Modellierung so großer Pitchwinkel wird sich im folgenden als schwierig herausstellen. Kleinste Pitchwinkel wurden von Beck (1993) in M31 bei großen Radien gemessen; bei 14.5 kpc betrug er $-7^\circ \pm 3^\circ$.

Negative Pitchwinkel bedeuten, daß die Magnetfeldspiralen der Rotation des Zentrums nachlaufen. Genauer gesagt, definiert man die positive Richtung der B_φ-Komponente durch den Rotationssinn, dann ist der Pitchwinkel bei unterschiedlichen Vorzeichen von B_r und B_φ negativ, bei gleichen Vorzeichen positiv. Blickt man auf eine rotierende Spiralstruktur mit negativem Pitchwinkel, so scheinen die Feldlinien, unabhängig von der tatsächlichen Orientierung des Feldes, nach außen zu laufen. Bei positivem Pitchwinkel laufen die Linien nach innen.

Auch der intergalaktische Raum wird offensichtlich von einem sehr schwachen magnetischen Feld durchzogen. Die Messung ist sehr schwierig – man beobachtet die Polarisation der Radiostrahlung entfernter Galaxien und versucht den Anteil der Faraday-Drehung, der durch das intergalaktische Feld verursacht wird, von der Polarisationsdrehung der eigenen Galaxis zu trennen, und man muß außerdem Voraussetzungen an die Polarisationsrichtung der von der Quelle ausgehenden Radiostrahlung machen. Eine umfassende Auswertung der Beobachtungen von 142 Radioquellen durch Vallée (1983) ergibt eine Obergrenze für die intergalaktische Feldstärke von 10^{-10} G. Eine alternative, nicht weniger unsichere Methode vergleicht Röntgen- und Radiohintergrundstrahlung und liefert eine Obergrenze von 10^{-8} G. Der minimale Unterschied zwischen galaktischen und

intergalaktischen Feldern liegt also bei 2 Größenordnungen.

Magnetische Feldstärken innerhalb von Galaxienhaufen und -superhaufen liegen deutlich höher. Kim (1989) bestimmte die Feldstärke in einem Superhaufen, der aus dem Coma-Galaxienhaufen und dem Abell-1367-Cluster besteht, zu 0.3–0.6 μG. Vallée (1990) fand für das intergalaktische Feld innerhalb des Virgo-Superhaufens eine magnetische Feldstärke von 1.5 μG. Solche starken Felder sind nach Ansicht von Kim (1989) durch Turbulenz eines intergalaktischen Mediums aus viel schwächeren primordialen Magnetfeldern entstanden und nicht allein die Verstärkung durch Kompression des Urfeldes zum Galaxiensuperhaufen.

2.4 Differentielle Rotation in Galaxien

Durch Messungen von Radialgeschwindigkeiten aus Dopplerverschiebung und Eigenbewegungen senkrecht zur Sichtlinie des Beobachters sind die Geschwindigkeitsfelder in Galaxien recht gut bekannt. Eine umfassende Arbeit von Amram et al. (1994) gibt Rotationskurven in Abhängigkeit vom Abstand zum galaktischen Zentrum für 15 Galaxien an. Die meisten von ihnen zeigen ein sehr ähnliches typisches Verhalten: Bis zu einem bestimmten Radius r_0 zwischen 2 und 5 kpc wächst die Rotationsgeschwindigkeit etwa linear an, entsprechend einer starren Rotation. Weiter außen ist die Rotationsgeschwindigkeit annähernd konstant (v_0). Die Winkelgeschwindigkeiten sind also im Innern nahezu konstant und im Außenbereich mit $1/r$ fallend. Wir haben es im Außenbereich daher mit differentieller Rotation zu tun. In bestimmten Fällen ist die Rotationsgeschwindigkeit nicht konstant, sondern wächst bis zum Rand der Galaxie weiter an. Solche Beobachtungen wurden an Galaxien im Innern von Galaxienhaufen gemacht (Amram et al. 1996), und es ist zu vermuten, daß solche Rotationskurven durch den Einfluß massereicher Nachbargalaxien verursacht werden.

Die Rotationskurven in z-Richtung, also senkrecht zur Scheibenebene, wurden von Gvaramadze & Lominadze (1988) theoretisch untersucht, indem sie die Rotationskurve eines drei-komponentigen Massenmodells bei $z = 0$ an die beobachteten Kurven typischer Spiralgalaxien anpaßten und mit den gewonnenen Parametern die vertikale Rotationskurve modellierten. Sie zeigten, daß die Rotationsgeschwindigkeiten bis zu einem vertikalen Abstand von etwa 2 kpc annähernd konstant bleiben, erst in größeren Höhen bleibt das Gas hinter der Scheibenrotation zurück.

Mit differentieller Rotation nicht verwechselt werden darf die Spiralstruktur der Galaxien. Es handelt sich nicht um das „Aufdrehen“ einer radialen Struktur in eine azimutale, sondern um Dichtewellen aus interstellarer Materie und Sternen.

Abbildung 2.2: Winkelgeschwindigkeiten in der Konvektionszone der Sonne, abgeleitet aus helioseismologischen Beobachtungen (nach Hill 1992).

2.5 Differentielle Rotation der Sonne

Durch die Beobachtung der Sonnenflecken läßt sich die Rotationsgeschwindigkeit an der Oberfläche recht genau bestimmen. Dabei stellt sich heraus, daß die Umlaufzeit mit steigender solarer Breite zunimmt. Mit der Beobachtung von Sonnenflecken erreicht man aber bestenfalls solare Breiten von $50°$, mit der Doppler-Spektroskopie kann man dagegen die Rotationsgeschwindigkeit der Sonnenoberfläche auf allen solaren Breiten messen. Eine einfache Darstellung der differentiellen Rotation der Sonne über die Poldistanz ϑ wird von Snodgrass & Howard (1985) unter Verwendung der Gegenbauer-Polynome angegeben:

$$\Omega = \bar{A} + \bar{B}(5\cos^2\vartheta + 1) + \bar{C}(21\cos^4\vartheta - 14\cos^2\vartheta + 1). \tag{2.1}$$

Die Konstanten wurden in der genannten Arbeit zu $\bar{A} = 2.7247 \cdot 10^{-6}$ s^{-1}, $\bar{B} = -0.1327 \cdot 10^{-6}$ s^{-1} und $\bar{C} = -0.0224 \cdot 10^{-6}$ s^{-1} bestimmt; $\bar{A}$ ist die mittlere Rotationsgeschwindigkeit und entspricht einer Rotationsperiode von 26.7 Tagen. Die Rotation der Sonne ist an den Polen etwa 30% langsamer als am Äquator.

Die Beobachtung sogenannter akustischer Sonnenoszillationen (z.B. Toutain & Fröhlich 1992, Hasler et al. 1997) erlaubt die Untersuchung der inneren Struktur der Sonne mit seismologischen Methoden. Die Frequenz-Aufspaltung solcher p-Moden erlaubt Aussagen über die Rotation der Konvektionsschicht in verschiedenen Tiefen mittels

der Inversionsmethode: man versucht, aus der Beobachtung integraler Größen Aussagen über den die Funktion unter dem Integral zu machen. Die Methoden zur Lösung solcher Integralgleichungen sind in Unno et al. (1989) zusammengefaßt.

Ausführlich sind die Modelle für differentielle Rotation und die Hydrodynamik der Turbulenz in der Konvektionszone der Sonne in Rüdiger (1989) dargestellt.

Ein Ergebnis helioseismologischer Beobachtungen ist in Abbildung 2.2 dargestellt. Für das spätere Modell eines Dynamos für das Magnetfeld der Sonne ist der Abfall der Winkelgeschwindigkeit am Äquator wesentlich – wir haben es sogar in einem gewissen Breitenbereich um den Äquator fast mit einer Zylindergeometrie zu tun, die das später vorgestellte eindimensionale Modell rechtfertigt.

Kapitel 3

Die Dynamotheorie

Die direkte vollständige Lösung der magnetohydrodynamischen Gleichungen, in denen sowohl die Bewegung des leitenden Mediums, dessen Wirkung auf eingebettete Magnetfelder sowie deren Rückwirkung auf die Bewegung des Fluids berücksichtigt wird, ist bis heute nicht möglich. Die Ursache liegt in den extrem großen Skalenunterschieden zwischen den sich herausbildenden typischen Längen der Fluidbewegung (Wirbelgröße) und der Längenskala des großräumigen Magnetfeldes. Der Skalenunterschied liegt typischerweise bei drei bis vier Größenordnungen. Die Längenskala der Granulation an der Sonnenoberfläche, die ein Ausdruck der Turbulenz in der Konvektionsschicht der Sonne ist, beträgt im Mittel 1400 km. Die Magnetfelder aber dehnen sich auf die gesamte Sonne aus, deren Radius 696 000 km beträgt. Damit muß ein vollständiges magnetohydrodynamisches Modell einen Skalenunterschied von $5 \cdot 10^3$ überbrücken. Das Modell benötigt in diesem Beispiel etwa 10 000 Gitterpunkte in jeder Raumrichtung, also etwa 10^{12} Gitterpunkte insgesamt. Derartige Rechnungen sind bisher nicht ausführbar. Man schneidet daher die unteren Längenskalen bei der Modellierung ab und versucht, geeignete Zusammenhänge zwischen Mittelwerten der turbulenten Bewegung und dem großskaligen Magnetfeld zu finden. Ein solches Vorgehen findet in der Mean-Field-Theorie Ausdruck. Im folgenden wird die Anwendung des Mean-Field-Ansatzes auf die Dynamotheorie beschrieben.

3.1 Der $\alpha^2\Omega$-Dynamo

Die folgenden Maxwellschen Gesetze sind für uns von Bedeutung: Das Induktionsgesetz

$$\dot{\mathbf{B}} = -\mathrm{rot}\,\mathbf{E} \tag{3.1}$$

und (unter Vernachlässigung des Verschiebungsstromes)

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{B} = \mu\mathbf{j}, \tag{3.2}$$

wobei $\mathbf{B}$ die magnetische Induktion, $\mathbf{E}$ das elektrische Feld und $\mathbf{j}$ die elektrische Stromdichte bedeuten. Die magnetische Permeabilität μ weicht für die hier betrachteten kosmischen Objekte nur sehr wenig vom Vakuumwert ab. Weiterhin benutzen wir das Ohmsche Gesetz, bei dem aus elektrischen Kräften und Lorentzkräften Ströme erzeugt werden:

$$\mathbf{j} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \tag{3.3}$$

Dabei ist σ die elektrische Leitfähigkeit und $\mathbf{u}$ die Geschwindigkeit des Fluids. Durch Bilden der Rotation in (3.3) und Einsetzen der genannten Maxwellschen Gesetze erhalten wir die Induktionsgleichung

$$\dot{\mathbf{B}} = \mathrm{rot}\,(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) - \mathrm{rot}\,\frac{1}{\mu\sigma}\mathrm{rot}\,\mathbf{B}. \tag{3.4}$$

Außerdem muß das angestrebte Dynamomodell die Quellenfreiheit des Magnetfeldes

$$\mathrm{div}\,\mathbf{B} = 0 \tag{3.5}$$

gewährleisten.

Das exakte Magnet- und Geschwindigkeitsfeld im turbulenten Medium werden für uns unbekannt bleiben. Die Mean-Field-Theorie geht daher von den Ansätzen

$$\mathbf{B} = \bar{\mathbf{B}} + \mathbf{B}' \qquad \text{und} \qquad \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} + \mathbf{u}' \tag{3.6}$$

aus; die Felder werden in einen mittleren und einen turbulenten Anteil zerlegt. Wenn F und G fluktuierende Funktionen sind, so seien $\bar{F}$ und $\bar{G}$ deren Mittelwerte und $F' = F - \bar{F}$ und $G' = G - \bar{G}$ die Fluktuationen. In unserem Fall haben wir zur Berechnung eines $\dot{\bar{\mathbf{B}}}$ nach (3.4) den Mittelwert $\overline{\mathbf{F} \times \mathbf{G}} = \overline{(\bar{\mathbf{F}} + \mathbf{F}') \times (\bar{\mathbf{G}} + \mathbf{G}')}$ zu berechnen. Mit den Reynoldsbeziehungen

$$\overline{F + G} = \bar{F} + \bar{G}, \quad \overline{\bar{F}\bar{G}} = \bar{F}\bar{G}, \quad \overline{\bar{F}G'} = 0 \tag{3.7}$$

erhalten wir ein neues Ohmsches Gesetz:

$$\bar{\mathbf{j}} = \sigma(\bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{B}} + \overline{\mathbf{u}' \times \mathbf{B}'}). \tag{3.8}$$

Die Struktur des Ohmschen Gesetzes ist um eine neue, turbulente elektromotorische Kraft genannte Größe erweitert. Wir bezeichnen diese Größe mit

$$\mathcal{E} = \overline{\mathbf{u}' \times \mathbf{B}'}. \tag{3.9}$$

$\mathcal{E}$ kann als Funktional von $\bar{\mathbf{B}}$ aufgefaßt werden. Wie sich weiter zeigen läßt, hängt $\mathcal{E}$ nur von $\bar{\mathbf{B}}$ und seiner ersten räumlichen Ableitung ab und ist in diesen Größen linear. Daher ist die Darstellung

$$\mathcal{E} = \alpha\bar{\mathbf{B}} - \beta\mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{B}} \tag{3.10}$$

gerechtfertigt. Strenggenommen können α und β Tensoren sein, doch bleiben Anisotropien in α und β in dieser Arbeit unberücksichtigt. Die Induktionsgleichung lautet nun

$$\dot{\bar{\mathbf{B}}} = \mathrm{rot}\,(\bar{\mathbf{u}} \times \bar{\mathbf{B}} + \alpha\bar{\mathbf{B}}) - \eta_{\mathrm{T}}\,\mathrm{rot}\,\mathrm{rot}\,\bar{\mathbf{B}} \tag{3.11}$$

wobei $\eta_{\mathrm{T}} = \eta_{\mathrm{T}}(\beta, \mu, \sigma)$ turbulente Viskosität genannt wird. Eine ausführliche Beschreibung der Dynamotheorie auf der Grundlage der Mean-Field-Hydrodynamik für verschiedene astronomische Anwendungen findet man in Krause & Rädler (1980).

Die Wirkung des α-Effekts ist in Abbildung 3.1 illustriert. Die Richtung des mittleren Magnetfeldes liege in Richtung der y-Achse. Das turbulente Medium wird durch eine Helixbewegung mit z- und φ-Komponenten der Geschwindigkeit abstrahiert. Aus der Wechselwirkung der toroidalen Geschwindigkeitskomponente mit dem mittleren Magnetfeld $\bar{\mathbf{B}}$ ergibt sich ein elektrisches Feld, das im Halbraum $y < 0$ in negative z-Richtung zeigt und im anderen Halbraum $y > 0$ in entgegengesetzte Richtung (linke Seite von Abbildung 3.1). Die elektrischen Felder bewirken Ströme in die gleichen Richtungen. Diese Ströme bewirken ihrerseits kleinskalige Magnetfelder, die sich zwischen den beiden Strömen zu einer x-Komponente verstärken (rechte Seite von Abbildung 3.1). Die Wechselwirkung dieses Feldes mit der anderen Geschwindigkeitskomponente in z-Richtung liefert die elektromotorische Kraft $\mathcal{E} = \mathbf{u}_z \times \mathbf{B}'$. Dabei zeigt $\mathcal{E}$ in die gleiche Richtung wie das mittlere Magnetfeld $\bar{\mathbf{B}}$ und der Ansatz $\mathcal{E} = \overline{\mathbf{u}' \times \mathbf{B}'} = \alpha\bar{\mathbf{B}}$ ist gerechtfertigt. Auch die umgekehrte Konstruktion ist möglich; die z-Komponente der Geschwindigkeit erzeugt durch das mittlere Magnetfeld ein elektrisches Feld in $-x$-Richtung – in gleicher Richtung beginnt ein Strom zu fließen. Um ihn herum bildet sich ein toroidales Magnetfeld $\mathbf{B}'$, das mit der toroidalen Geschwindigkeitskomponente wechselwirkt und elektromotorische Kräfte in positiver y-Richtung, also parallel zu $\bar{\mathbf{B}}$ erzeugt.

3.2 Herleitung des verwendeten Modells

Das Verhalten des oben beschriebenen Dynamos (3.11) wird an einem eindimensionalen Modell studiert. Geht man von einem rotationssymmetrischen Objekt aus, entfallen jegliche φ-Abhängigkeiten, und das Modell reduziert sich auf die zwei Raumrichtungen r und z in Zylinderkoordinaten oder r und θ in Kugelkoordinaten. Außerdem werden die Eigenschaften des Dynamos nur durch die radiale Ableitung der Winkelgeschwindigkeit, also der Stärke der differentiellen Rotation bestimmt. Ist dieser Winkelgeschwindigkeitsgradient konstant, so reduziert sich das Modell allein auf die z-Richtung, d.h. das Magnetfeld ist nur abhängig von der z-Richtung. Damit modellieren wir eine unendlich ausgedehnte, differentiell rotierende Scheibe der Dicke H und erhalten zwei Magnetfeldkomponenten B_r und B_φ. Die Komponente B_z kann wegen der geforderten Divergenzfreiheit von $\mathbf{B}$, im eindimensionalen Fall also $\partial B_z/\partial z = 0$, höchstens konstant sein. Da wir einen feldfreien Raum als Randbedingung verlangen werden, muß sogar $B_z \equiv 0$ sein. Um die Lesbarkeit zu verbessern, bezeichnen im folgenden alle Komponenten von B die mittlere Flußdichte.

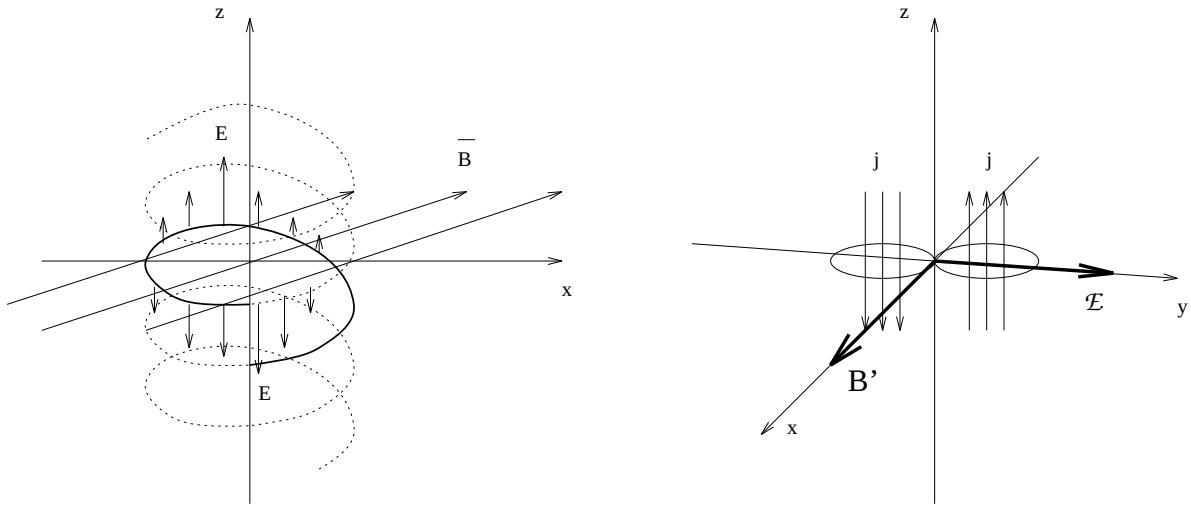

Abbildung 3.1: *Darstellung der Parallelität von mittlerem Magnetfeld und turbulenter elektromotorischer Kraft (α-Effekt).*

3.2.1 Induktionsgleichung

Wir schreiben die Induktionsgleichung (3.11) komponentenweise und erhalten zunächst

$$\dot{\mathbf{B}} = \mathrm{rot}\left[\begin{pmatrix} \bar{u}_y B_z - \bar{u}_z B_y \\ \bar{u}_z B_x - \bar{u}_x B_z \\ \bar{u}_x B_y - \bar{u}_y B_x \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} B_x \\ B_y \\ B_z \end{pmatrix}\right] - \eta_{\mathrm{T}}\,\mathrm{rot}\begin{pmatrix} \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} \\ \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Einige Terme fallen wegen $B_z \equiv 0$, $\partial\mathbf{B}/\partial x = \mathbf{0}$ und $\partial\mathbf{B}/\partial y = \mathbf{0}$ heraus, und nach Bilden der zweiten Rotation erhalten wir

$$\dot{\mathbf{B}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial y}\Big(\bar{u}_x B_y - \bar{u}_y B_x\Big) - \frac{\partial}{\partial z}\Big(\bar{u}_z B_x + \alpha B_y\Big) \\ \frac{\partial}{\partial z}\Big(-\bar{u}_z B_y + \alpha B_x\Big) - \frac{\partial}{\partial x}\Big(\bar{u}_x B_y - \bar{u}_y B_x\Big) \\ \frac{\partial}{\partial x}\Big(\bar{u}_z B_x + \alpha B_y\Big) - \frac{\partial}{\partial y}\Big(-\bar{u}_z B_y + \alpha B_x\Big) \end{pmatrix} - \eta_{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} -\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial B_x}{\partial z} \\ -\frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial B_y}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial B_x}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial B_y}{\partial z} \end{pmatrix}. \tag{3.13}$$

Das mittlere Geschwindigkeitsfeld repräsentiere die differentielle Rotation

$$\bar{\mathbf{u}} = (0, \bar{u}_y(x), 0). \tag{3.14}$$

Aus der Dynamogleichung fällt ein großer Teil der Ableitungen heraus, da $\partial\bar{u}_y/\partial y = 0$, $\bar{u}_x \equiv 0$ und $\bar{u}_z \equiv 0$. Es bleibt ein Differentialgleichungssytem für die beiden Komponenten B_x und B_y übrig:

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial z}\Big(\alpha B_y\Big) + \eta_{\mathrm{T}}\frac{\partial^2 B_x}{\partial z^2}, \tag{3.15}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z}\big(\alpha B_x\big) + \frac{\partial u_y}{\partial x} B_x + \eta_{\mathrm{T}} \frac{\partial^2 B_y}{\partial z^2}. \tag{3.16}$$

Wir normieren die Gleichungen auf die dimensionslosen Koordinaten

$$\hat{t} = \frac{\eta_{\mathrm{T}}}{H^2} t, \qquad \hat{z} = \frac{z}{H}, \tag{3.17}$$

wobei H die Ausdehnung unseres Dynamos in z-Richtung ist. Dann erhalten wir für das Gleichungssystem

$$\frac{\partial B_x}{\partial \hat{t}} = -\frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left(\frac{\alpha H}{\eta_{\mathrm{T}}} B_y \right) + \frac{\partial^2 B_x}{\partial \hat{z}^2}, \tag{3.18}$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial \hat{t}} = \frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left(\frac{\alpha H}{\eta_{\mathrm{T}}} B_x \right) + \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{H^2}{\eta_{\mathrm{T}}} B_x + \frac{\partial^2 B_y}{\partial \hat{z}^2}. \tag{3.19}$$

Die differentielle Rotation des Objekts wird offensichtlich durch $\partial u_y / \partial x$ beschrieben. Wir fassen diesen Term und die anderen Konstanten vor B_x zu der dimensionslosen Konstanten

$$C_\Omega = \frac{\partial u_y}{\partial x} \frac{H^2}{\eta_{\mathrm{T}}} \tag{3.20}$$

zusammen. Wie im folgenden Abschnitt beschrieben, hängt α sowohl von $\hat{z}$ als auch von B ab; aus den Konstanten definieren wir ein C_α:

$$C_\alpha \hat{\alpha}(\hat{z}) \psi(\mathbf{B}) = \frac{\alpha_0 H}{\eta_{\mathrm{T}}} \hat{\alpha}(\hat{z}) \psi(\mathbf{B}) = \frac{\alpha H}{\eta_{\mathrm{T}}}. \tag{3.21}$$

Dabei ist α_0 das dimensionsbehaftete, maximale und feldfreie α im untersuchten Objekt. Die Wirkung des α-Effekts liefert exponentiell wachsende Lösungen für das Magnetfeld. Aus physikalischen Gründen muß also ein zusätzlicher Mechanismus einen Sättigungszustand des Magnetfeldes herbeiführen. In der Induktionsgleichung unberücksichtigt blieb die Rückwirkung des Magnetfelds auf die Turbulenz. Die durch das sich aufbauende Magnetfeld wirkenden Lorentzkräfte verringern α ab einer bestimmten Feldstärke, der Äquipartitionsfeldstärke. Dieser Mechanismus wird α-Quenching genannt. Für die Äquipartitionsfeldstärke wird die kinetische Energiedichte der turbulenten Bewegung herangezogen:

$$w_{\mathrm{kin}} = \frac{1}{2} \varrho \mathbf{u}'^2 \stackrel{\mathrm{def}}{=} \frac{1}{2\mu} B_{\mathrm{eq}}, \tag{3.22}$$

das heißt,

$$B_{\mathrm{eq}} = \sqrt{\mu \varrho \langle \mathbf{u}'^2 \rangle}. \tag{3.23}$$

Dem α-Quenching durch die Funktion $\psi(\mathbf{B})$ wollen wir uns weiter unten widmen, zunächst schreiben wir das Gleichungssystem in der Form auf, wie es in den numerischen Berechnungen verwendet wurde. Ist $\mathbf{A}$ das zu den Feldkomponenten B_x und B_y

gehörende Vektorpotential, so läßt es sich durch $\mathbf{A} = (A_x(\hat{z}), A_y(\hat{z}), 0)$ ausdrücken. Wir schreiben B_x durch Bilden von $\mathrm{rot}\,\mathbf{A}$ um in $B_x = -\partial A_y/\partial\hat{z} =: -\partial A/\partial\hat{z}$. Dann gilt für die verwendeten Gleichungen:

$$\frac{\partial A}{\partial \hat{t}} = C_\alpha \hat{\alpha}(\hat{z})\,\psi(B_{\mathrm{tot}})B + \frac{\partial^2 A}{\partial \hat{z}^2}, \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial B}{\partial \hat{t}} = -C_\alpha \frac{\partial}{\partial \hat{z}}\left(\hat{\alpha}(\hat{z})\,\psi(B_{\mathrm{tot}})\frac{\partial A}{\partial \hat{z}}\right) - C_\Omega \frac{\partial A}{\partial \hat{z}} + \frac{\partial^2 B}{\partial \hat{z}^2}. \tag{3.25}$$

B_{tot} ist das Gesamtfeld

$$B_{\mathrm{tot}} = \sqrt{B^2 + \left(\frac{\partial A}{\partial \hat{z}}\right)^2} \tag{3.26}$$

in einem Punkt. Außerhalb des Integrationsgebietes wird ein feldfreier Raum angenommen, d.h.

$$B(0,\hat{t}\,) = B(1,\hat{t}\,) = 0, \qquad \frac{\partial A(0,\hat{t}\,)}{\partial \hat{z}} = \frac{\partial A(1,\hat{t}\,)}{\partial \hat{z}} = 0 \tag{3.27}$$

für alle $\hat{t} \geq 0$.

3.2.2 Rückwirkung des Magnetfelds auf die Turbulenz

Bereits oben wurde erwähnt, daß die Rückwirkung des vom α-Effekt generierten Magnetfeldes die Geschwindigkeitsfluktuationen verringert. Dadurch sinkt auch das von den Fluktuationen erzeugte α auf ein Gleichgewicht zwischen Magnetfelderzeugung und Turbulenzvernichtung. Die Abhängigkeit α von $\mathbf{B}$ ist nicht genau bekannt und zentrales Thema dieser Arbeit. Der einfachste Ansatz einer solchen „Quenching-Funktion“ ist

$$\psi(B) = \begin{cases} 1, & \text{falls } B_{\mathrm{tot}} < B_{\mathrm{eq}} \\ 0, & \text{falls } B_{\mathrm{tot}} > B_{\mathrm{eq}} \end{cases}. \tag{3.28}$$

Ein solcher Ansatz wurde von Stix (1972) verwendet. Die numerischen Probleme, die aus einer solchen Stufenfunktion resultieren, mußten durch eine schmale, differenzierbare Übergangsfunktion gelöst werden. Wesentlich häufiger werden Ansätze verwendet, bei denen ψ wie B_{tot}^{-2} oder B_{tot}^{-3} für große B fällt. Rüdiger (1974) untersuchte die Wirkung eines konstanten Magnetfeldes beliebiger Stärke auf das Turbulenzfeld eines elektrisch leitenden, inkompressiblen Mediums und fand $\alpha \sim B_{\mathrm{tot}}^{-3}$ für große Feldstärken. In der vorliegenden Arbeit werden Funktionen, die sich wie

$$\psi = \frac{1}{1 + \left(\frac{B_{\mathrm{tot}}}{B_{\mathrm{eq}}}\right)^2} \tag{3.29}$$

und

$$\psi = \frac{\left(\frac{B_{\mathrm{tot}}}{B_{\mathrm{eq}}}\right)^2}{1 + \left(\frac{B_{\mathrm{tot}}}{B_{\mathrm{eq}}}\right)^4} \tag{3.30}$$

verhalten, verglichen. Die zweite Quenching-Funktion ist ein Ansatz, der gleichzeitig einen Mechanismus für die Ursache der Turbulenz bereitstellt. Erst ein gewisses magnetisches Feld generiert die Turbulenz, die zur Feldverstärkung führt. Bei großen Feldern setzt das Quenching ein. In der Funktion 3.29 wird die Turbulenz als hydrodynamische Gegebenheit vorausgesetzt. Genauere Untersuchungen über die Rückwirkung des Magnetfeldes auf die Turbulenz und damit auf den α-Effekt haben zu der Quenching-Funktion

$$\psi = \frac{15}{32\beta^4}\left(1 - \frac{4\beta^2}{3(1+\beta^2)^2} - \frac{1-\beta^2}{\beta}\arctan\beta\right) \tag{3.31}$$

geführt (Rüdiger & Kitchatinov 1993), wobei $\beta = B_{\mathrm{tot}}/B_{\mathrm{eq}}$. Die Funktion (3.31) wurde hier für den $\alpha^2\Omega$-Dynamo im Sinne von (3.29) verwendet, für den Quenching-Ansatz (3.30) ist dagegen keine genauere Theorie bekannt, er wurde in dieser Form auf den $\alpha^2\Omega$-Dynamo angewandt.

Der α-Effekt ist nicht gleichmäßig über z verteilt. Die wichtigste Eigenschaft ist seine Antisymmetrie bezüglich der Äquatorebene, da die Corioliskräfte, die wesentlich an der Bildung der Turbulenz beteiligt sind und die Richtung der Wirbel vorgeben, ober- und unterhalb der Äquatorebene verschiedene Vorzeichen tragen.

Die Wirkung der Corioliskräfte auf aufsteigende links- und rechtsdrehende Wirbel ist in Abbildung 3.2 dargestellt. Beim Aufsteigen dehnen sich die Wirbel aus, der Geschwindigkeitsvektor liegt daher nicht tangential an einer Kreisschraube, sondern weist leicht nach außen. Die gepunktet gezeichnete Corioliskraft erzeugt einen resultierenden Geschwindigkeitsvektor, der bei dem rechtsdrehenden Wirbel noch weiter nach außen zeigt, also dissipativ auf den Wirbel wirkt, beim linksdrehenden Wirbel dagegen fast mit dem Kreisschraubenvektor zusammenfällt, den Wirbel also vor dem Zerfall bewahrt. Bei absinkenden Wirbeln ist sowohl die Abweichung der Geschwindigkeit vom Kreisschraubenvektor als auch die Drehrichtung entgegengesetzt, so daß auch bei absinkenden Wirbeln linksdrehende unterstützt, rechtsdrehende aber zerstört werden. Dieser Mechanismus gilt sowohl für Sterne als auch für Galaxien. Auf der Südhälfte des Objekts sind Vertikalgeschwindigkeit des Wirbels und Winkelgeschwindigkeit des Objekts entgegengesetzt, hier werden rechtsdrehende Wirbel unterstützt.

Zur Bestimmung der Funktion $\hat{\alpha}(z)$ müssen wir die Variabilität einiger Größen über z betrachten. Die Äquipartitionsfeldstärke hängt von der Dichte ab, die ihrerseits mit zunehmendem Abstand von der Äquatorebene einer Galaxie abnehmen sollte. Wir nehmen an, daß die Dichteverteilung einem Gaußprofil entspricht:

$$\varrho(z) \sim \mathrm{e}^{-\frac{z^2}{2H_\varrho^2}}. \tag{3.32}$$

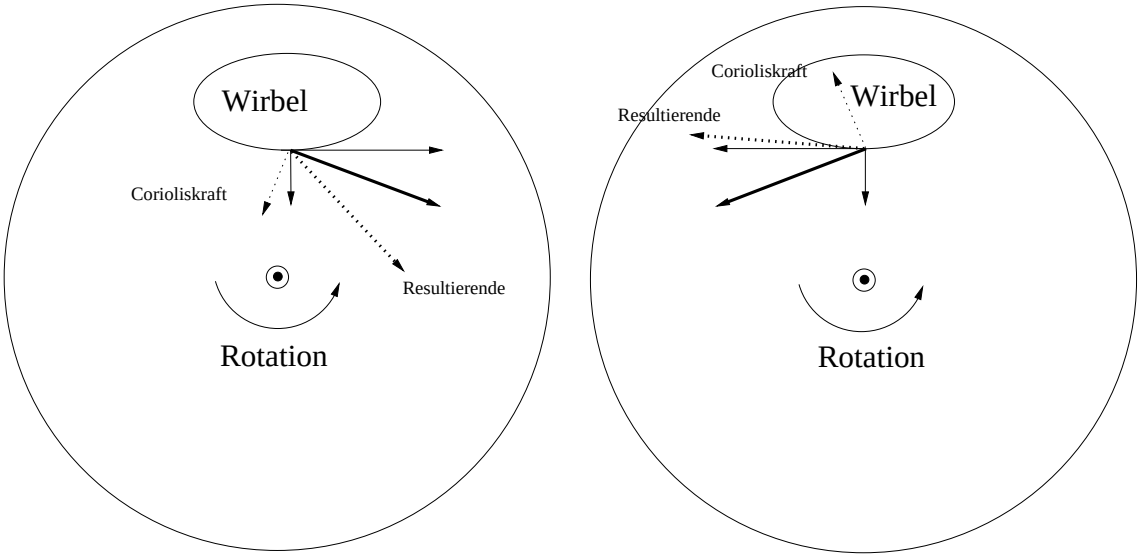

Abbildung 3.2: *Begünstigung linksdrehender Wirbel auf der Nordseite eines rechtshändig drehenden Objekts. Links ist ein aufsteigender, mathematisch positiv rotierender Wirbel dargestellt, auf der rechten Seite ein aufsteigender, negativ rotierender Wirbel. Der fett gezeichnete Pfeil deutet die Geschwindigkeit des sich ausdehnenden Wirbels ohne Basisrotation des Körpers an.*

Dabei ist H_ϱ die typische Dicke der Scheibe, innerhalb der die Dichte wesentlich von Null verschieden ist. Diese Dicke muß nicht notwendig gleich der Dicke der berechneten Scheibe sein, sie ist daher mit einem anderen Symbol bezeichnet.

Die Wirkung der Lorentzkräfte durch turbulente Bewegung und Magnetfeld wurde von Steenbeck et al. (1966) untersucht. Als wesentliches Ergebnis folgt die bereits bei der Illustration des α-Effekts gefundene Parallelität von elektromotorischer Kraft und mittlerem Magnetfeld. Die Proportionalitätskonstante α hat nach der genannten Arbeit die Struktur

$$\alpha \sim \frac{\partial \log\left(\varrho\sqrt{\langle \mathbf{u}'^2\rangle}\right)}{\partial z}\,\langle \mathbf{u}'^2\rangle = -\frac{z}{H_\varrho^2}\langle \mathbf{u}'^2\rangle. \tag{3.33}$$

Die mittleren Geschwindigkeitsfluktuationen wollen wir als unabhängig von z betrachten:

$$\frac{\partial\langle \mathbf{u}'^2\rangle}{\partial z} = 0. \tag{3.34}$$

Dann fällt aus der logarithmischen Ableitung das $\sqrt{\langle \mathbf{u}'^2\rangle}$ heraus. Wir wollen nun das variable $B_{\mathrm{eq}}(z)$ aus der α-Quenching-Funktion herausziehen und es durch ein effektives

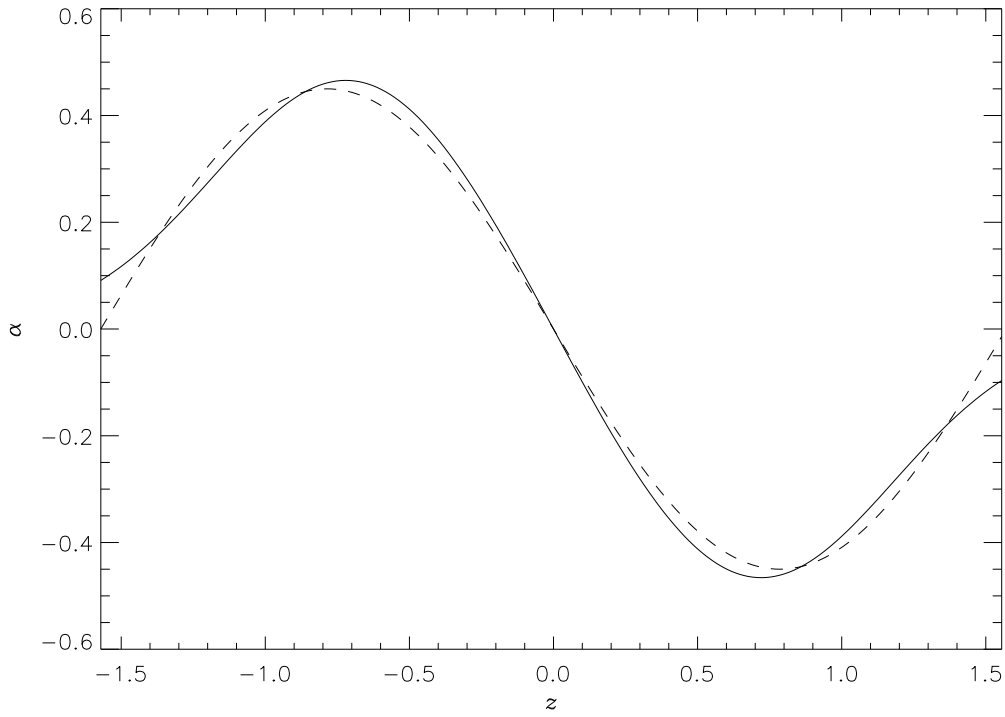

Abbildung 3.3: *Theoretische und genäherte Verteilung des α-Effekts.*

$\hat{\alpha}(z)$ ausdrücken, deshalb schreiben wir

$$\alpha(z)\frac{1}{1+\frac{B_{\mathrm{tot}}^2}{B_{\mathrm{eq}}^2(z)}} = \hat{\alpha}(z)\frac{1}{1+B_{\mathrm{tot}}^2}. \tag{3.35}$$

Durch Einsetzen der genannten Zusammenhänge erhalten wir eine Funktion, die wie das gesuchte effektive $\hat{\alpha}$ skaliert:

$$\hat{\alpha}(z) = \alpha\frac{1+B_{\mathrm{tot}}^2}{1+\frac{B_{\mathrm{tot}}^2}{B_{\mathrm{eq}}^2(z)}} \sim -\frac{z}{H_\varrho^2}\langle \mathbf{u}'^2\rangle\frac{1+B_{\mathrm{tot}}^2}{1+\frac{B_{\mathrm{tot}}^2}{\mu \mathrm{e}^{-z^2/(2H_\varrho^2)}\langle \mathbf{u}'^2\rangle}}. \tag{3.36}$$

Eine solche Funktion ist in Abbildung 3.3 mit $H_\varrho \approx 0.6$ in dimensionslosen z-Einheiten dargestellt. Der angegebene Zusammenhang kann sehr gut durch eine Sinusfunktion der Form

$$\hat{\alpha}(\hat{z}) = -\sin(2\hat{z}) \tag{3.37}$$

beschrieben werden. Die Einschränkung des Modells auf eine Scheibe der Dicke H scheint nun gerechtfertigt, da das effektive $\hat{\alpha}$ außerhalb der Scheibe wegen der exponentiell fallenden Dichte schnell verschwindet.

3.3 Wertebereiche für C_α und C_Ω

Zur Ermittlung sinnvoller Werte für die dimensionslosen Parameter C_α und C_Ω müssen wir einige „Materialeigenschaften“ der untersuchten Objekte, also Sterne und Galaxien, abschätzen. Bereits im vorangegangenen Abschnitt hatten wir einen Ausdruck für α benutzt, der vollständig von Rüdiger & Kitchatinov (1993) angegeben wurde:

$$\alpha = -\frac{1}{2}\tau_{\mathrm{corr}}\Omega^*\Psi(\Omega^*)\frac{\partial \log(\varrho\sqrt{\langle \mathbf{u}'^2\rangle})}{\partial z}\,\langle \mathbf{u}'^2\rangle, \tag{3.38}$$

wobei τ_{corr} die Korrelationszeit der turbulenten Bewegung ist; sie entspricht etwa der Lebensdauer der Wirbel. Ω^* ist die dimensionslose Corioliszahl, definiert durch $\Omega^* = 2\tau_{\mathrm{corr}}\Omega$, wobei Ω die Kreisfrequenz aus der Rotation des Objekts ist. Der Term $\Omega^*\Psi(\Omega^*)$ bestimmt wesentlich die Stärke von α bei langsam rotierenden Körpern. Bei schneller Rotation ($\Omega^* \to \infty$) konvergiert die Funktion gegen $5\pi/8$.

Um aus Gleichung (3.38) das maximale α zu erhalten, benutzen wir die Gaußsche Dichteverteilung (3.32), setzen $H \approx H_\varrho$ und $z = H$ und erhalten

$$\alpha_{\max} = \frac{\pi}{4}\frac{\tau_{\mathrm{corr}}\langle \mathbf{u}'^2\rangle}{H}. \tag{3.39}$$

Die Geschwindigkeitsfluktuationen seien wieder konstant über z. Für Galaxien wird angenommen, daß die Korrelationszeit etwa der Umlaufzeit des Mediums um das Zentrum entspricht. Bei einem Radius von 4 kpc und einer Bahngeschwindigkeit von etwa 200 km/s beträgt die Umlaufzeit 0.13 Gyr (Gigajahre). Die Geschwindigkeitsfluktuationen betragen etwa 10 km/s. Die Scheibendicke läßt sich mit 1 kpc abschätzen. Dann erhalten wir aus (3.39) ein $\alpha_{\max} = 10$ km/s.

Interessanterweise sind die Umrechnungen von kpc in km (1 kpc $= 3.086 \cdot 10^{16}$ km) und Gyr in Sekunden (1 Gyr $= 3.156 \cdot 10^{16}$ s) sehr ähnlich. Wir rechnen daher näherungsweise 1 km/s $\approx$ 1 kpc/Gyr. Für die Berechnung von C_α benötigen wir ein geeignetes η_{T}, das sehr schwierig zu bestimmen ist und häufig mit $\eta = 10^{22}$ m^2/s angegeben wird; in unserer Umrechnung also etwa 1 kpc^2/Gyr. Man erhält schließlich für Galaxien

$$C_\alpha = 10. \tag{3.40}$$

Nicht weniger wahrscheinlich sind schneller rotierende Galaxien mit $\tau_{\mathrm{corr}} \approx 0.01$ Gyr. Die schnellere differentielle Rotation “verschmiert” die Wirbel schneller, und wir dürfen von unserer Näherung Rotationsperiode $\approx$ Korrelationszeit erneut Gebrauch machen. Der Wert für $\alpha_{\max}$ sinkt dann auf etwa ein Zehntel und wir erhalten

$$C_\alpha = 1. \tag{3.41}$$

Die Korrelationszeit der Wirbel in der Konvektionszone der Sonne beträgt etwa 10 Tage (Küker 1996). Die Geschwindigkeitsfluktuationen werden oft mit 10 m/s angegeben.

Die Dicke der Dynamo-Zone beträgt rund ein Zehntel des Sonnenradius; wir verwenden hier 10^8 m. Schließlich benötigen wir einen Wert für die Turbulenzviskosität η_T, die mit etwa 10^8 m^2/s angegeben wird. Bei diesen Werten erhält man

$$C_\alpha = 0.7. \tag{3.42}$$

Auch höhere Geschwindigkeitsfluktuationen werden angegeben; bei $\langle \mathbf{u}'^2 \rangle = 50$ m/s erhält man das 25fache:

$$C_\alpha = 17. \tag{3.43}$$

Für eine Abschätzung des Parameters C_Ω in Galaxien und Sternen müssen wir die typische differentielle Rotation kennen. Es handelt sich bei diesen Objekten um rotierende Objekte, unser eindimensionaler Dynamo (3.24, 3.25) kennt aber keine Rotationsachse mehr. Das in der Definition von (3.20) auftretende $\partial u_y/\partial x$ ist ein Maß für die Scherung des Materials in einem linear bewegten Medium. Ein Körper mit $u_\varphi =$ const. rotiert aber durchaus differentiell. Wir müssen daher die Scherung des Fluids auf gekrümmten Bahnen betrachten und erhalten

$$S = \frac{\mathrm{d}u_\varphi}{\mathrm{d}r} - \frac{u_\varphi}{r}. \tag{3.44}$$

Für den Fall einer konstanten Bahngeschwindigkeit v_0 außerhalb eines bestimmten Radius r_0 (siehe Abschnitt 2.4) erhält man die stärkste differentielle Rotation bei r_0, wir nennen diese negative Größe Ω_0. Mit $v_0 = 200$ km/s und $r_0 = 4$ kpc läßt sich C_Ω sofort angeben

$$C_\Omega = \frac{\Omega_0 H^2}{\eta} = -50. \tag{3.45}$$

Nach den verschiedenen Bestimmungen der Rotationskurve im Innern der Sonne wächst die Rotationsfrequenz von etwa 430 nHz auf 460 nHz über einen Dicke von höchstens 0.2 Sonnenradien. Die daraus ermittelte Scherung beträgt

$$S = 5 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{s}^{-1}. \tag{3.46}$$

Zusammen mit der Dicke der Dynamozone und der turbulenten Viskosität erhält man

$$C_\Omega = +50. \tag{3.47}$$

Bemerkenswert ist, daß die Parameter C_α und C_Ω für so unterschiedliche Objekte wie Galaxien und Sterne betragsmäßig so dicht beieinander liegen. Da der Parameterbereich für beide Objektarten sich in dieser Weise überlappt, können wir unsere Ergebnisse sowohl auf Galaxien als auch auf Sterne projizieren. Wir dürfen aber nicht vergessen, daß die vorgestellten Gleichungen (3.24, 3.25) eine starke geometrische Vereinfachung sind. Sie stellen eher einen Prototyp für präzisere, mehrdimensionale Modelle dar, der das prinzipielle Verhalten des $\alpha^2\Omega$-Dynamos zeigen soll.

Kapitel 4

Numerische Umsetzung des Modells

Die Gleichungen (3.24, 3.25) sind von parabolischem Typ. In der allgemeinen Form partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$F(u_{xx}, u_{xt}, u_{tt}, u_x, u_t, u, x, t) = 0 \tag{4.1}$$

sind parabolische Differentialgleichungen definiert durch

$$F_{(u_{xx})}F_{(u_{tt})} - F^2_{(u_{xt})} = 0, \tag{4.2}$$

wobei die Indizes Ableitungen nach den entsprechenden Variablen oder Funktionen bedeuten. In unserem Fall kommen weder gemischte noch zweite Zeitableitungen vor, d.h. die partielle Differentialgleichung ist parabolisch.

Zur Lösung des Problems wird ein rein explizites Differenzenverfahren mit Zeitschrittkontrolle verwendet. Die Integration findet auf dem Gebiet $[0, \pi]$, $t \geq 0$, statt – ein solches Raumgebiet erlaubt die einfache Festlegung von symmetrischen, antisymmetrischen und gemischten Anfangsbedingungen durch trigonometrische Funktionen. Ein allgemeines Stabilitätskriterium für die Lösung von Gleichungen parabolischen Typs mit einem expliziten Verfahren ist

$$\frac{\Delta t}{(\Delta z)^2} \leq \frac{1}{2}. \tag{4.3}$$

In der numerischen Realisierung sind 201 Gitterpunkte auf einem Gebiet $[0, \pi]$ verteilt; die Gitterweite ist also $\Delta z = 0.0157$. Aus dieser räumlichen Auflösung ergibt sich eine Zeitschrittweite von $\Delta t \leq 0.000123$.

Für die Zeitschrittkontrolle werden die maximalen Inkremente von *A* und *B* bestimmt und durch die Maximalwerte von *A* und *B* dividiert. Der Zeitschritt Δt wird solange halbiert oder verdoppelt, bis das größere der beiden Inkremente – bennen wir es mit ξ – im Bereich

$$\frac{1}{2}\xi_{\text{opt}} \leq \xi \leq 2\xi_{\text{opt}} \tag{4.4}$$

eines optimalen Inkrements ξ_{opt} liegt. Der Zeitschritt ist dabei natürlich auf das maximale Δt aus (4.3) begrenzt.

Analytische Aussagen über die Stabilität von nichtlinearen partiellen Differentialgleichungen zu machen, ist äußerst schwierig. Schon im Falle einfacher Nichtlinearitäten, wie beispielsweise Funktionen $f(\mathbf{B})$, die nicht von Ableitungen der Unbekannten abhängen, sind Aussagen über Stabilität und Lösungsverhalten nur noch unter speziellen Bedingungen möglich.

Die technischen Einzelheiten des Programms seien hier nur in Kürze dargestellt. Als Programmiersprache diente C, zur Erstellung aller in diese Arbeit eingebundenen Grafiken wurde die Interactive Data Language (IMSL/IDL) verwendet.

Erste Ableitungen werden durch die Mittelpunktformel

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1})}{2h}, \tag{4.5}$$

zweite Ableitungen durch die Dreipunktformel

$$f''(x_i) = \frac{f(x_{i-1}) + f(x_{i+1}) - 2f(x_i)}{h^2} \tag{4.6}$$

diskretisiert, wobei h die konstante Gitterschrittweite ist. Beide Formeln approximieren die Ableitungen bis zur Ordnung $\mathcal{O}(h^2)$. Der Term mit der gemischten Ableitung

$$\frac{\partial}{\partial \hat{z}} \left(\hat{\alpha}(\hat{z})\, \psi(B_{\mathrm{tot}}) \frac{\partial A}{\partial \hat{z}} \right) \tag{4.7}$$

aus Gleichung (3.25) wird durch die Diskretisierung

$$\frac{\hat{\alpha}^{i+1}\psi(B_{\mathrm{tot}}^{i+1}) - \hat{\alpha}^{i-1}\psi(B_{\mathrm{tot}}^{i-1})}{2h}\, \frac{A_{i+1} - A_{i-1}}{2h} + \hat{\alpha}^{i}\psi(B_{\mathrm{tot}}^{i}) \frac{A_{i-1} + A_{i+1} - 2A_i}{h^2} \tag{4.8}$$

approximiert, wobei die hochgestellten Indizes die Funktionswerte an den Stellen $\hat{z}_i$ usw. bezeichnen. Dieses Vorgehen ist von gleicher Fehlerordnung wie die Einführung eines Hilfsgitters, auf dem zunächst $\hat{\alpha}(\hat{z})\psi(B_{\mathrm{tot}})$ und die erste Ableitung von A berechnet werden, um dann die zweite z-Ableitung auf dem ursprünglichen Gitter zu berechnen. Ein solches Hilfsgitter hat die gleiche Maschenweite h und ist um $h/2$ gegen das Hauptgitter versetzt.

Für den $\alpha^2\Omega$-Dynamo mit α-Quenching nach Rüdiger & Kitchatinov (1993) muß die Funktion $\psi(\beta)$ wegen der Singularitäten in (3.31) für $\beta \to 0$ durch eine Reihenentwicklung ersetzt werden. Es genügen Terme bis zur quadratischen Ordnung:

$$\psi(\beta) = 1 - \frac{12}{7}\beta^2 + \mathcal{O}(\beta^4). \tag{4.9}$$

Die Näherung wird für $\beta < 0.001$ angewandt.

Kapitel 5

Ergebnisse

Im folgenden bezeichnet B mit allen verwendeten Indizes das mittlere, großskalige Magnetfeld, normiert mit der Äquipartitionsfeldstärke B_{eq} aus (3.23). Wir können diese Größe mit Hilfe der geschätzten Eigenschaften von Galaxien und der Sonne bestimmen. Die Geschwindigkeitsfluktuationen seien in Galaxien wieder 10 km/s, die Dichte kann man mit 10^{-24} g/cm^{-3} abschätzen. Für die Sonne benutzen wir wieder Geschwindigkeitsfluktuationen zwischen 10 und 50 m/s. Da die magnetfelderzeugende Schicht am unteren Rand der Konvektionszone vermutet wird, ist es sinnvoll, die dort herrschende Dichte von etwa 1 g/cm^3 zu verwenden (Stix 1989). Eine zweite Größe zum Vergleich der Modelldaten mit realen Objekten ist die Diffusionszeit τ_{D}, deren Name von der Normierung am dissipativen Term der Dynamogleichungen 3.24 und 3.25 stammt. Die Diffusionszeit errechnet sich automatisch nach (3.17) durch

$$\tau_{\mathrm{D}} = \frac{H^2}{\eta_{\mathrm{T}}}. \tag{5.1}$$

Tabelle 5.1 gibt typische Skalierungswerte für B_{eq} und τ_{D} an. Die Angaben aller dimensionslosen Zeiten in den Abbildungen sind in Einheiten von Diffusionszeiten und alle dimensionslosen Feldstärken in Einheiten von Äquipartitionsfeldstärken zu verstehen.

5.1 Parität der Lösungen

Der zur zeitlichen Integration der Gleichungen verwendete Code enthält keine Einschränkungen der Symmetrie der Lösungen. Trotzdem sind alle oszillierenden und stationären Lösungen symmetrisch. Aus Anfangswerten mit gemischter Symmetrie setzt sich allein die symmetrische Mode durch. Startet man das Modell mit einer rein antisymmetrischen Anfangsverteilung in B_r und B_φ, so findet man instabile antisymmetrische Lösungen. Schon eine geringe Störung der Antisymmetrie der Anfangswerte bewirkt die Einstellung einer stabilen symmetrischen Lösung. In Abbildung 5.1 ist das Umschlagen

Tabelle 5.1: *Normierungsgrößen B_{eq} und τ_{D} zur Umrechnung der dimensionslosen Feldstärken und Zeiten der theoretischen Ergebnisse in galaktische und stellare Größen.*

Größe	Galaxie	Sonne
B_{eq}	4 μG	4000…18 000 G
τ_{D}	1 Gyr	3.2 yr

der Symmetrie bei einer antisymmetrischen Anfangsverteilung

$$B(\hat{z},0) = B_0 \sin 2\hat{z}, \qquad A(\hat{z},0) = B_0 \cos 2\hat{z} \tag{5.2}$$

dargestellt, verwendet wurden die Dynamogleichungen (3.24, 3.25) mit den Randbedingungen (3.27) und der α-Quenching-Funktion $\psi(B_{\mathrm{tot}}$ aus (3.31). Die geringen numerischen Störungen, die sich aus der Diskretisierung ergeben, reichen bereits aus, nach gewisser Zeit eine symmetrische Lösung durchzusetzen. Sowohl antisymmetrische als auch symmetrische Lösung oszillieren, im oberen Teil von Abbildung 5.1 ist die zeitliche Etwicklung der B_φ-Komponenten bei $\hat{z} = 0.66$ aufgetragen.

Die Parität einer Verteilung definieren wir durch

$$p = \frac{E_{\mathrm{s}} - E_{\mathrm{a}}}{E}. \tag{5.3}$$

Dabei sind

$$E_{\mathrm{s}} = \frac{1}{4\mu} \int_0^{\pi/2} [B_\varphi(z) + B_\varphi(\pi - z)]^2 \, \mathrm{d}z \tag{5.4}$$

der symmetrische Anteil der Lösung,

$$E_{\mathrm{a}} = \frac{1}{4\mu} \int_0^{\pi/2} [B_\varphi(z) - B_\varphi(\pi - z)]^2 \, \mathrm{d}z \tag{5.5}$$

der antisymmetrische Anteil der Lösung und

$$E = \frac{1}{2\mu} \int_0^{\pi} B_\varphi^2 \, \mathrm{d}z \tag{5.6}$$

die Gesamtenergie (genauer: Energieflächendichte) der Lösung. Bei $p = 1$ ist die Lösung dann rein symmetrisch, bei $p = -1$ ist sie rein antisymmetrisch. Für Magnetfelder, wie man sie auf der Sonne beobachtet, wären antisymmetrische Lösungen wünschenswert.

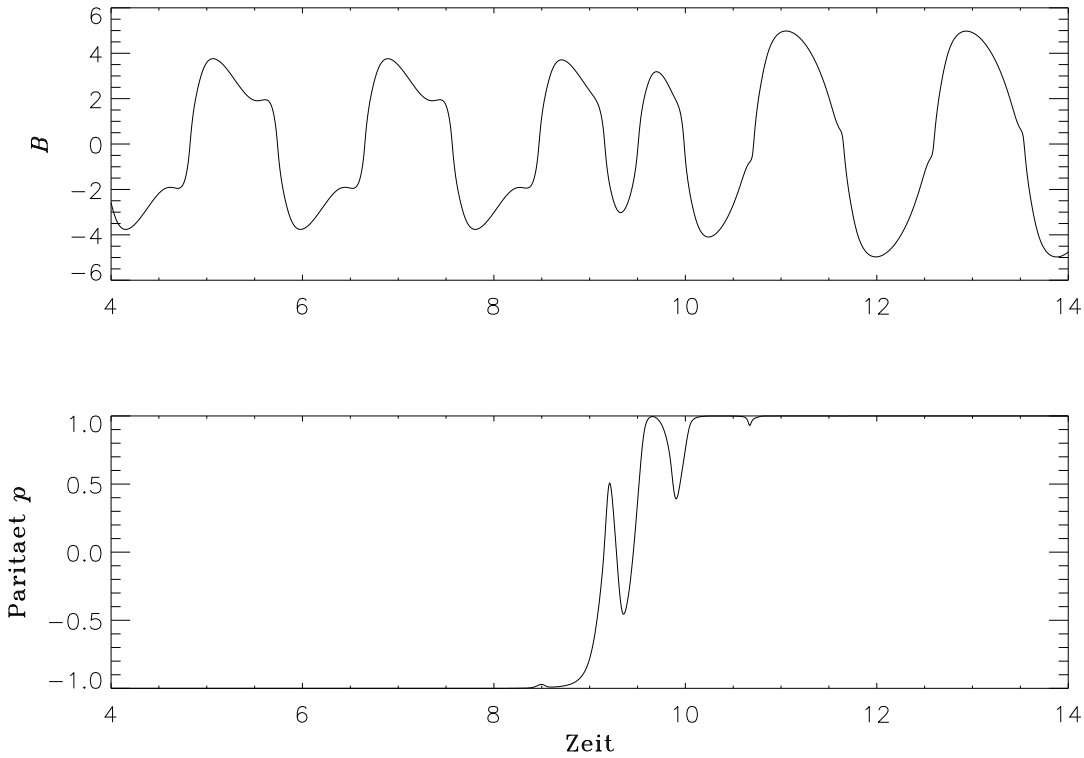

Abbildung 5.1: *Änderung der Symmetrie der Lösung bei rein antisymmetrischer Anfangsverteilung der B_r- und B_φ-Komponenten (unten). Das B-Feld an einem festen Gitterpunkt im oberen Graphen zeigt das Umschlagen zwischen periodischer, antisymmetrischer und periodischer, symmetrischer Lösung.*

Insbesondere sei an das Schmetterlingsdiagramm in Abbildung 2.1 erinnert, das auf das Entstehen von Magnetfeldern auf höheren solaren Breiten schließen läßt, die sich im Laufe des halben Magnetfeldzyklus auf niederen Breiten konzentrieren, ein Vorgang, der sich in der zweiten Halbperiode mit umgekehrtem Vorzeichen wiederholt. In Abbildung 5.2 ist das Umschlagen der antisymmetrischen Lösung in eine symmetrische gezeigt, im gleichen Zeitfenster wie in Abbildung 5.1.

Wir müssen bereits feststellen, daß die gewünschte Breitenverteilung des Magnetfeldes nicht von der antisymmetrischen Lösung geliefert werden kann. Man muß aber die Einfachheit des Modells bedenken, in dem schon die Krümmung des Objekts Sonne nicht berücksichtigt ist; außerdem ist die Sonne der einzige Stern, von dem die Breitenverteilung des Magnetfeldes bekannt ist – umgekehrte Zeitverläufe bei anderen Sternen sind ebenfalls denkbar.

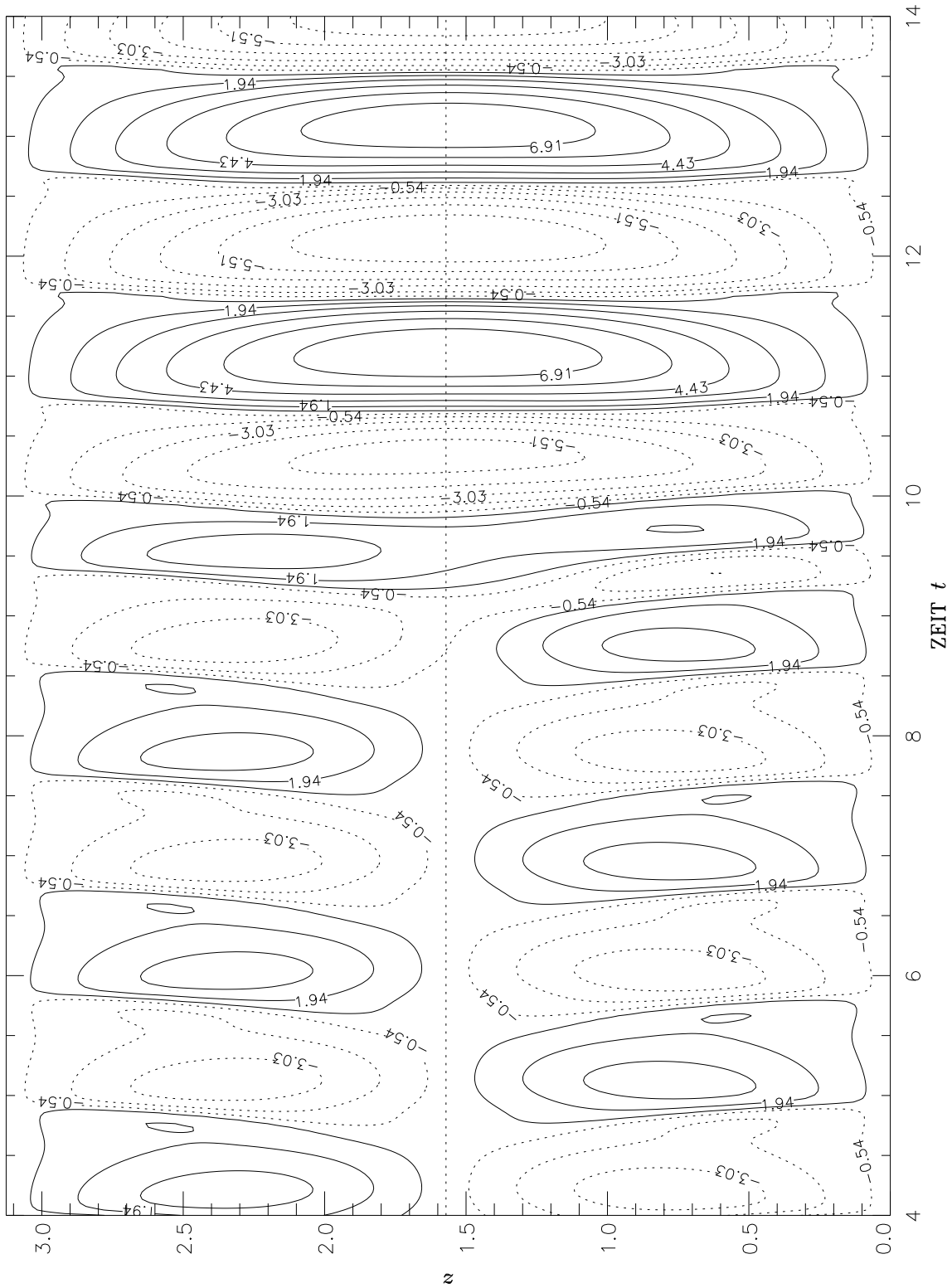

Abbildung 5.2: *Schmetterlingsdiagramm während des Umschlagens der rein antisymmetrischen Lösung in die symmetrische. Als Parameter waren* $C_\alpha = 10$ *und* $C_\Omega = 100$ *gewählt.*

5.2 $\alpha^2\Omega$-Dynamo mit 1/(1 + B^2)-Quenching

Wir untersuchen die vollständigen, aus der Induktionsgleichung folgenden partiellen Differentialgleichungen des eindimensionalen $\alpha^2\Omega$-Dynamos mit hydrodynamisch vorausgesetzter Turbulenz, aber Rückwirkung des Magnetfeldes auf die turbulente Bewegung, die sich im α-Quenching vom Typ

$$\psi = \frac{1}{1+B^2} \tag{5.7}$$

ausdrückt. Genaugenommen wurde hier die von Rüdiger und Kitchatinov (1993) bestimmte, präzisere Funktion (3.31) verwendet, die für große $B_{\rm tot}$ wie $B_{\rm tot}^{-3}$ fällt. Als Randbedingung wird ein feldfreier Raum außerhalb des Integrationsgebietes angenommen:

$$B(0,\hat{t}) = B(1,\hat{t}) = 0, \qquad \frac{\partial A(0,\hat{t})}{\partial \hat{z}} = \frac{\partial A(1,\hat{t})}{\partial \hat{z}} = 0 \tag{5.8}$$

für alle $\hat{t} \geq 0$. Ein solches Modell wurde bereits in Rüdiger & Arlt (1996) zur Untersuchung von Abhängigkeiten der Zyklusperiode und der Feldstärke von stellaren Rotationsperioden verwendet.

Die am weitesten verbreiteten Dynamomodelle betrachten entweder den Grenzfall verschwindender differentieller Rotation (sogenannter α^2-Dynamo, z.B. Brandenburg et al. 1989) oder den sehr stark differentieller Rotation verglichen mit dem α-Effekt (sogenannter $\alpha\Omega$-Dynamo, z.B. Rüdiger et al. 1994). Während der α^2-Dynamo im Differentialgleichungssystem (3.24, 3.25) mit $C_\Omega = 0$ enthalten ist, geht das Gleichungssystem beim $\alpha\Omega$-Dynamo in

$$\frac{\partial A}{\partial \hat{t}} = \hat{\alpha}(\hat{z})\psi(B_{\rm tot})B + \frac{\partial^2 A}{\partial \hat{z}^2}, \tag{5.9}$$

$$\frac{\partial B}{\partial \hat{t}} = -\mathcal{D}\frac{\partial A}{\partial \hat{z}} + \frac{\partial^2 B}{\partial \hat{z}^2} \tag{5.10}$$

über. Die Dynamozahl

$$\mathcal{D} = \frac{\partial u_y}{\partial x}\frac{\alpha_0 H^3}{\eta^2} \tag{5.11}$$

beschreibt nun allein die Eigenschaften des Dynamos. In diesem Modell erhält man stationäre Dynamos bei $\mathcal{D} < -2.08$ und periodische Dynamos bei $\mathcal{D} > 44.1$. Die zweidimensionale Lösungskarte des $\alpha^2\Omega$-Dynamos ist in Abbildung 5.3 dargestellt und kann mit dem $\alpha\Omega$-Dynamo bei $C_\alpha = 1$ direkt verglichen werden. In diesem Fall stimmen die kritischen Werte für $C_\Omega^{\rm crit} = \mathcal{D}$ mit dem $\alpha\Omega$-Dynamo überein.

Das kritische $C_\alpha^{\rm crit}$ für den α^2-Dynamo, also $C_\Omega = 0$, wurde bereits von Meinel (1990) analytisch bestimmt:

$$C_\alpha^{\rm crit} = \sqrt{\pi^2 + \left(x_0\frac{H}{R}\right)^2}, \tag{5.12}$$

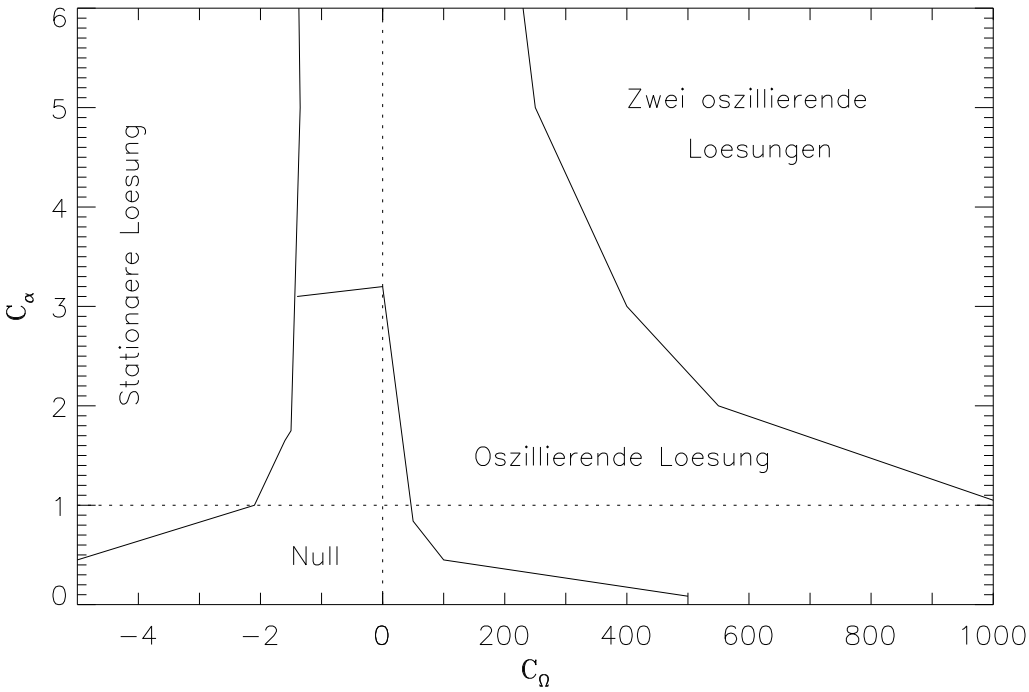

Abbildung 5.3: *Lösungsverhalten des vollständigen, eindimensionalen $\alpha^2\Omega$-Dynamos mit üblichem α-Quenching vom Typ $1/(1 + B_{\rm tot}^2)$. Man beachte den wechselnden Maßstab bei $C_\Omega = 0$.*

wobei R der Radius der Galaxie und $x_0 = 3.8317$ die erste Nullstelle der Besselfunktion J_1 sind. In unserem eindimensionalen Fall ist die Scheibe unendlich weit ausgedehnt, $R \to \infty$, und wir erhalten einfach

$$C_\alpha^{\rm crit} = 3.14. \tag{5.13}$$

Dieser Wert stimmt sehr gut mit der Grenze zwischen trivialer und periodischer Lösung bei $C_\Omega = 0$ in Abbildung 5.3 überein.

Abbildung 5.4 zeigt die Zyklusdauer auf zwei Schnitte durch die Lösungskarte bei $C_\Omega = 50$ und $C_\Omega = 20$. Drei dazu senkrechte Schnitte bei $C_\alpha = 5$, $C_\alpha = 2$ und $C_\alpha = 1$ sind in Abbildung 5.5 dargestellt. Außerdem ist die Zyklusdauer für den $\alpha\Omega$-Dynamo über $\mathcal{D}$ aufgetragen, ist also vergleichbar mit $C_\alpha = 1$. In der Tat liegen beide Kurven sehr dicht, sie scheinen zu konvergieren für $C_\Omega \gg C_\alpha$. Die Zyklusdauer hängt nicht sehr empfindlich von den Parametern bei stark überkritischen Werten $C_\alpha > C_\alpha^{\rm crit}$ oder $C_\Omega > C_\Omega^{\rm crit}$ ab.

Dennoch geht der $\alpha^2\Omega$-Dynamo nicht vollständig in den $\alpha\Omega$-Dynamo bei großen C_Ω über – Abbildung 5.3 zeigt einen Bereich mit zwei oszillierenden Lösungen bei starker differentieller Rotation. Das Einstellen der beiden Lösungen kann mit verschieden starken Anfangswerten erzwungen werden. Bis zu einem kritischen maximalen Startfeld $B_0^{\rm crit}$

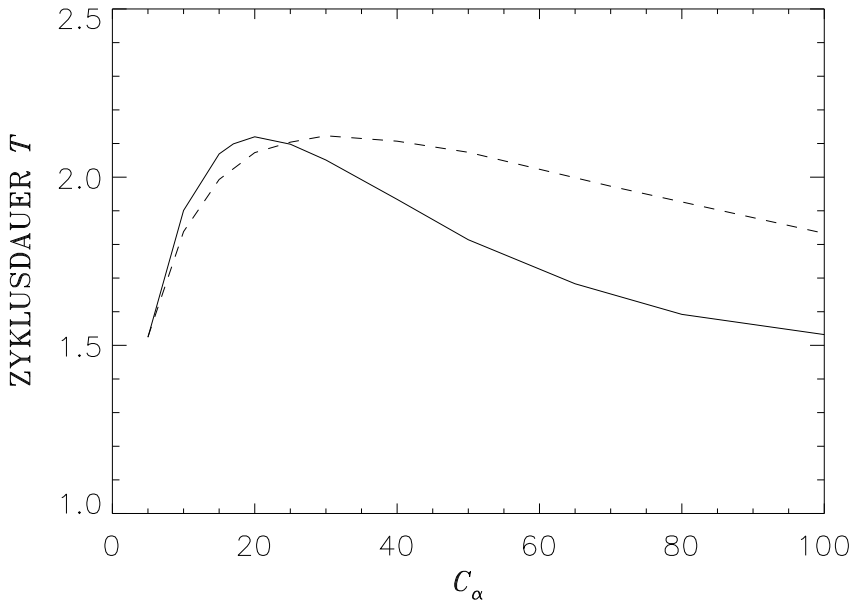

Abbildung 5.4: *Zyklusperiode des $\alpha^2\Omega$-Dynamos mit üblichem α-Quenching vom Typ $1/(1+B_{\rm tot}^2)$ in Abhängigkeit von C_α bei $C_\Omega = 50$ (durchgezogen) und bei $C_\Omega = 20$ (gestrichelt).*

stellt sich eine neue, kurzperiodische Lösung ein, bei $B_0 > B_0^{\rm crit}$ erhält man näherungsweise die Lösung des $\alpha\Omega$-Dynamos.

Bei sehr großen C_α und C_Ω ist die Zyklusperiode nicht mehr konstant. Mit wachsenden Parametern ändert sich die Zyklusdauer zunächst periodisch, steigert man differentielle Rotation oder α weiter, so erhält man keine ausgezeichnete Zyklusperiode mehr. Ein solches Verhalten kann als Übergang zu einem chaotischen Regime gedeutet werden. Bereits in Kapitel 2 wurde auf die Variabilität des Sonnenaktivitätszyklus hingewiesen, ein direkter Vergleich der vorliegenden Rechnungen mit den Beobachtungen würde allerdings wegen der Einfachheit des Modells zu weit führen. Deutlich wird aber, daß die verwendeten Nichtlinearitäten leicht kompliziertere als einfach-periodische Lösungen liefern können.

Die Stärke des α-Effekts, ausgedrückt durch C_α, ist in dem hier vorgestellten Modell zeitlich konstant. Simulationen zur Statistik von Wirbeln durch Otmianowska-Mazur et al. (1997) zeigen, daß die kurzzeitigen Variationen von α dessen Mittelwert um ein mehrfaches übersteigen können. Selbst über längere Zeiten von der Größenordnung einer Diffusionszeit gemittelte α-Fluktuationen sind noch groß genug, um Periodenschwankungen in einem Dynamo, der mit einem variablen α gesteuert wird, zu erzeugen. Der Autor konnte mit solchen α-Fluktuationen die Amplitude der Magnetfelder mit Perioden zwischen 20 und 40 Diffusionszeiten modulieren. Die Zeiten entsprechen 60 bis 130 Jahre

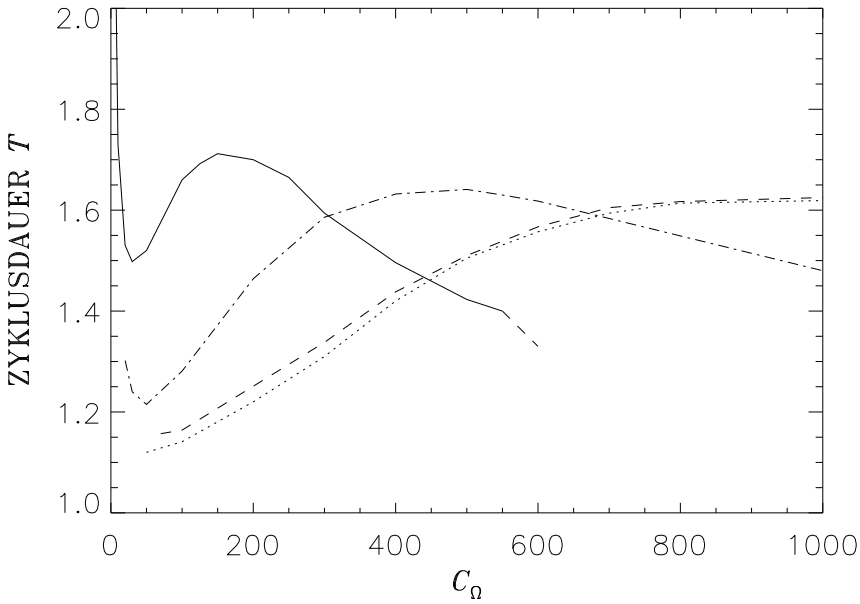

Abbildung 5.5: *Zyklusperiode in Abhängigkeit von C_Ω bei $C_\alpha = 5$ (durchgezogen), $C_\alpha = 2$ (Strich-Punkt-Kurve) und $C_\alpha = 1$ (gestrichelt). Die gepunktete Kurve stammt vom $\alpha\Omega$-Dynamo, wobei $\mathcal{D} \equiv C_\Omega$. Das gestrichelte Ende der durchgezogenen Kurve deutet das Einsetzen von Lösungen mit mehreren Perioden und Übergang zu möglichem chaotischen Verhalten an.*

in der Sonne, was gut mit den aus Beobachtungen vermuteten langperiodischen Schwankungen der Aktivität der Sonne übereinstimmt.

5.3 Anfangsfeld aus Kontraktion

Wir gehen nun über zu einem Modell, in dem das Magnetfeld Hauptursache der Turbulenz ist. Die bereits im Abschnitt α-Quenching genannte Funktion $\psi(B)$ ist nun

$$\psi(B_{\rm tot}) = \frac{B_{\rm tot}^2}{1 + B_{\rm tot}^4}. \tag{5.14}$$

Wir benötigen daher ein von Null verschiedenes Anfangsfeld, um einen Dynamo zu erzeugen. Genaugenommen könnte man ein solches Saatfeld auch auf größeren Raumbereichen als die Strecke H annehmen. Um dennoch Anfangswerte und Randbedingungen kompatibel zu gestalten, sei das Anfangsfeld auf dem Rand $\mathbf{B}|_{\hat{z}=0} = \mathbf{B}|_{\hat{z}=\pi} = \mathbf{0}$. Abbildung 5.9 zeigt die Verteilung des Anfangsfeldes auf die beiden Komponenten B_r und B_φ über z. In beiden Komponenten sind symmetrische, antisymmetrische und stationäre Anteile enthalten.

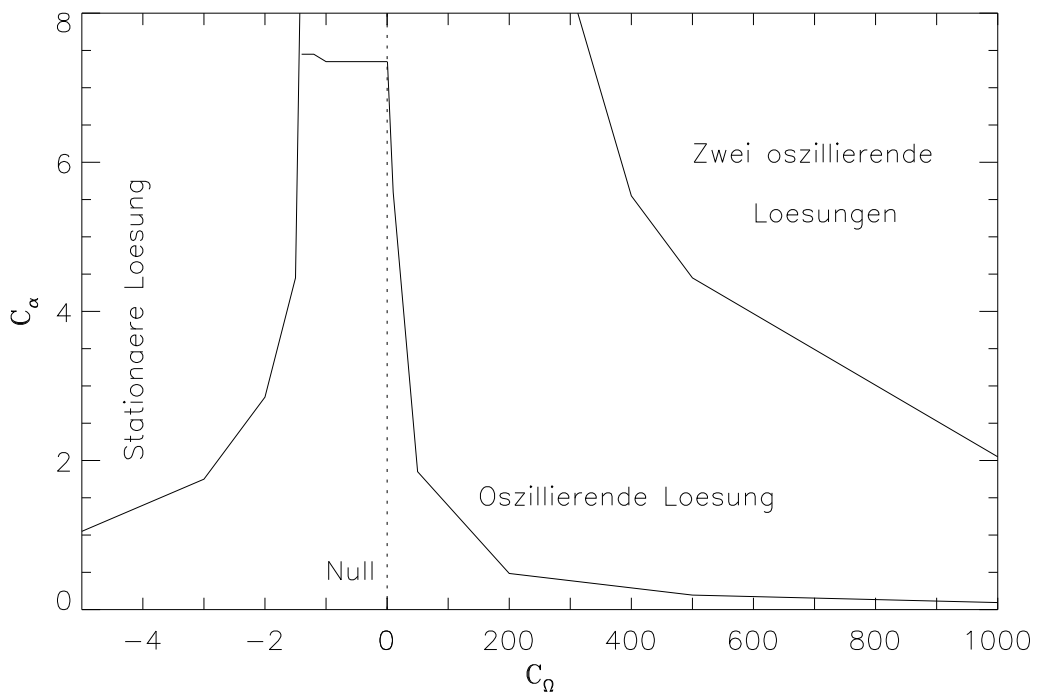

Abbildung 5.6: *Lösungsverhalten des $\alpha^2\Omega$-Dynamos mit $B_{\rm tot}^2/(1+B_{\rm tot}^4)$-Quenching.*

In den Abbildungen 5.7 und 5.8 sind die Zyklusdauer und die maximale Magnetfeldstärke in Abhängigkeit von C_α dargestellt. Für den im α^2-Regime arbeitenden Dynamo ($C_\alpha \gg C_\Omega$) hängt die Zyklusdauer noch weniger von C_α ab als beim gewöhnlichen α-Quenching aus Abschnitt 5.2. Die maximale Feldstärke ist annähernd proportional zu $\sqrt{C_\alpha}$ für große C_α.

Mit den eingangs errechneten Umrechnungen für Zyklusdauern und Feldstärken können wir das Dynamomodell mit der Sonne vergleichen. Die Periodenlängen entsprechen demnach etwa 6.5 Jahren. Solche Zeiträume stimmen im Rahmen des Modells gut mit beobachtbaren Zyklusdauern überein. Die Feldstärken zwischen 2 und 10 in dimensionslosen Einheiten entsprechen Werten zwischen 8 und 180 kG. Magnetfelder, die aus Sonnenflecken austreten, können Werte bis etwa 10 kG erreichen. Die am Boden der Konvektionszone induzierten Magnetfelder können also durchaus weit höhere Feldstärken haben.

In Abbildung 5.10 sind die für die Generierung eines stationären oder periodischen Dynamos erforderlichen Anfangsfelder $B_0^{\rm crit}$ ersichtlich. Natürlicherweise sind die notwendigen Anfangsfelder um so größer, je näher man $C_\alpha^{\rm crit}$ kommt.

Kennt man das kritische $C_\alpha^{\rm crit}$, ab dem sich überhaupt ein Dynamo erzeugen läßt, kann

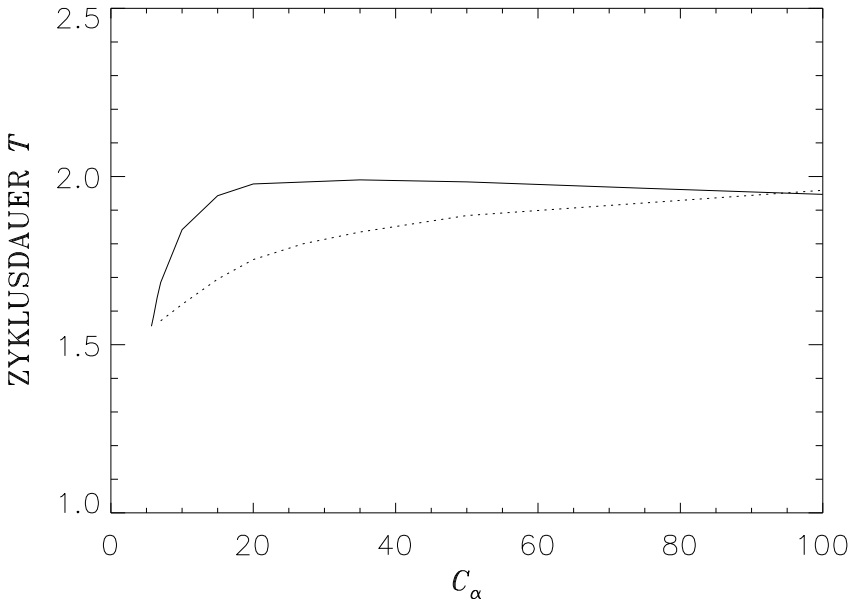

Abbildung 5.7: *Zyklusperiode des $\alpha^2\Omega$-Dynamos mit verschiedenen α-Quenching-Funktionen ($C_\Omega = 10$). Die durchgezogene Kurve gehört zum $B^2_{\rm tot}/(1 + B^4_{\rm tot})$-Quenching, die gestrichelte zum $B^2_\varphi/(1 + B^4_\varphi + B^2_r)$-Quenching.*

man das $B_0^{\rm crit}$ durch Lösen der Gleichung

$$C_\alpha^{\rm crit} = C_\alpha \frac{B_0^{{\rm crit}\,2}}{1 + B_0^{{\rm crit}\,4}} \tag{5.15}$$

abschätzen. Die Lösungskurve ist als gestrichelte Linie ebenfalls in Abbildung 5.10 eingetragen. Sie liegt deutlich über den numerisch bestimmten Werten, da wir den Term $C_\Omega\, \partial A/\partial \hat{z}$ aus (3.25) bei $C_\Omega = 10$ nicht vernachlässigen dürfen. Das durch die differentielle Rotation aus B_r erzeugte, verstärkte B_φ trägt wesentlich zur Bereitstellung ausreichend hoher Anfangsfelder für den eigentlichen Dynamo bei.

Schaltet man nun im Anfangsfeld die B_r-Komponente ab, so liegen die (wegen der veränderten Gesamtfeldstärke natürlich korrigierten) kritischen Anfangsfelder $B_0^{\rm crit}$ signifikant über dem Schätzwert aus Gleichung (5.15).

Die zeitliche Veränderung der Verteilung des Magnetfeldes über z ist in den Abbildungen 5.11 und 5.12 gezeigt. Ein solches Diagramm läßt sich mit dem Schmetterlingsdiagramm in Abbildung 2.1 vergleichen. Abbildung 5.11 zeigt die kurzperiodische Lösung des $\alpha^2\Omega$-Dyanamos, die beim $\alpha\Omega$-Dynamo nicht auftritt. Die entgegengesetzte Ausrichtung der „Flügel“, verglichen mit dem Diagramm der Sonnenflecken, ist auffallend. Ebenso kann das Modell keine entgegengesetzten Vorzeichen des Magnetfeldes auf

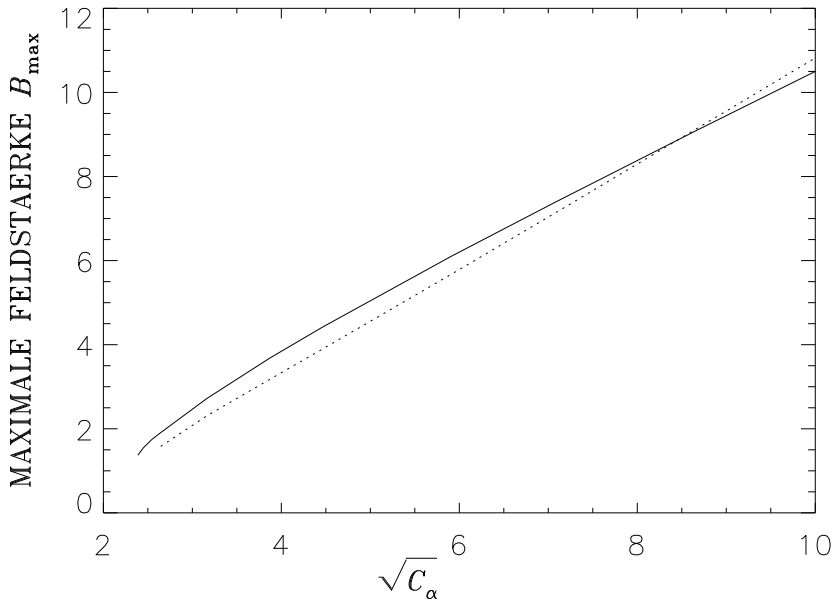

Abbildung 5.8: *Maximale Feldstärken von B_φ des $\alpha^2\Omega$-Dynamos mit verschiedenen α-Quenching-Funktionen, aufgetragen über $\sqrt{C_\alpha}$ ($C_\Omega = 10$). Die durchgezogene Kurve gehört zum $B_{\rm tot}^2/(1+B_{\rm tot}^4)$-Quenching, die gestrichelte zum $B_\varphi^2/(1+B_\varphi^4+B_r^2)$-Quenching.*

Nord- und Südhalbkugel liefern, da die antisymmetrische, oszillierende Lösung instabil ist. Die langperiodische Lösung, die sich auch mit dem $\alpha\Omega$-Dynamo approximieren läßt, zeigt keine Wanderung der Magnetfeldzentren über z. Schließlich zeigt Abbildung 5.13 die Lage der Feldvektoren über der Zeit. Dabei zeigt die B_φ-Komponente in die Zeitrichtung, die B_r-Komponente in die z-Richtung. Die gleichen Parameter wie in Abbildung 5.11 für die kurzperiodische Lösung waren gewählt. Die B_r-Komponente ist gegenüber der B_φ-Komponente fünffach verstärkt gezeichnet. Das Rotieren der Feldvektoren sowohl an einem festen Punkt mit der Zeit als auch zu fester Zeit über z bei einer solchen oszillierenden Lösung ist typisch für die zeitliche Änderung der Breitenverteilung einer Lösung.

5.4 Eingebettete Galaxie

Eine Galaxie möge bei ihrer Kontraktion ein schwaches intergalaktisches Magnetfeld verstärken. Das Anfangsfeld soll sich über den gesamten Integrationszeitraum als konstante, inhomogene Dirichlet-Randbedingung fortsetzen. In diesem Fall fällt das Argument für $B_z \equiv 0$ aus, da die Divergenzbedingung nur $\partial B_z/\partial\hat{z}$ verlangt und ein konstantes

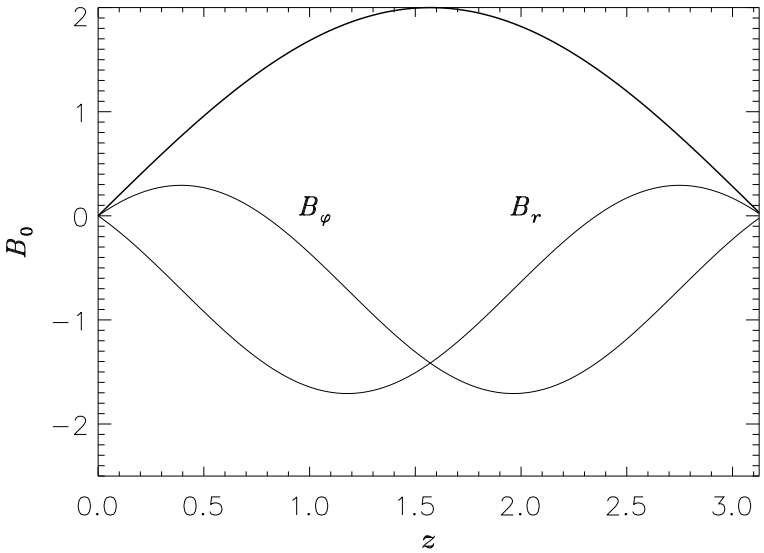

Abbildung 5.9: *Anfangsfeld bei kontrahierendem Stern. Die beiden nicht symmetrischen Kurven geben die Startwerte für B_r und B_φ wieder, die dick gezeichnete Kurve ist das Gesamtfeld B_{tot}.*

B_z durchaus möglich ist. Dennoch bleibt B_z für uns irrelevant, da es nicht abgeleitet nur in den Termen

$$\frac{\partial(u_x B_z)}{\partial \hat{z}} = \frac{\partial u_x}{\partial \hat{z}} B_z + u_x \frac{\partial B_z}{\partial \hat{z}} \tag{5.16}$$

und

$$\frac{\partial(u_y B_z)}{\partial \hat{z}} = \frac{\partial u_y}{\partial \hat{z}} B_z + u_y \frac{\partial B_z}{\partial \hat{z}} \tag{5.17}$$

vorkommt und die Geschwindigkeitsableitungen nach $\hat{z}$ ebenfalls verschwinden.

Bei $C_\Omega = 0$ handelt es sich um einen reinen α^2-Dynamo, und man findet für das nötige Startfeld die Abhängigkeit

$$B_0^{\mathrm{crit}} \sim \frac{1}{\sqrt{|C_\alpha|}}. \tag{5.18}$$

Wegen der vollkommenen Symmetrie der Gleichungen am Anfang ist die Lösung des Dynamos unabhängig von der Richtung der Anfangswerte (und Randbedingungen).

Für Galaxien sind negative Dynamozahlen $\mathcal{D} \approx C_\alpha C_\Omega$ gültig. Aus den Eigenschaften von milchstraßenartigen Galaxien ließen sich $C_\alpha \approx 10$ und $C_\Omega \approx -50$ abschätzen. Bei allen negativen Dynamozahlen stellen sich stationäre Lösungen ein. Die Pitchwinkel

$$p = \arctan \frac{B_r}{B_\varphi} \tag{5.19}$$

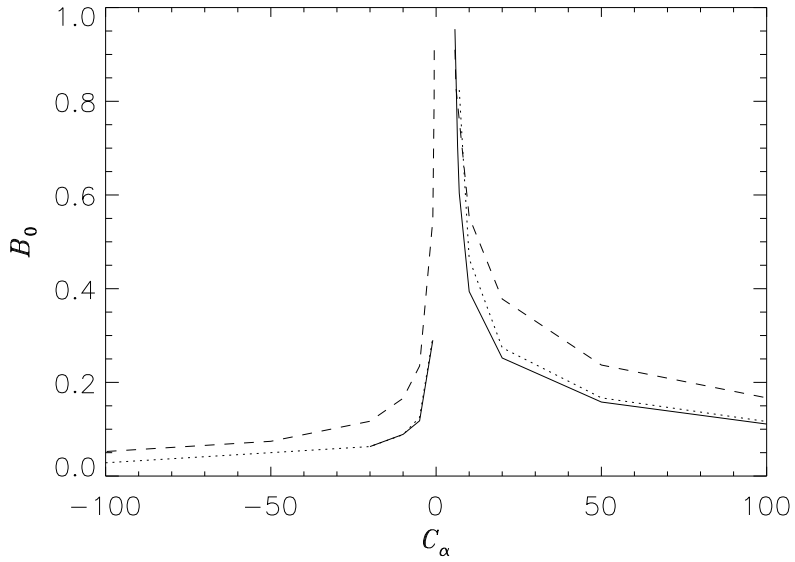

Abbildung 5.10: *Abhängigkeit der Anfangsfeldstärke B_0 von C_α ($C_\Omega = 10$). Die durchgezogene Kurve gehört zum Quenching $B^2_{\rm tot}/(1 + B^4_{\rm tot})$, die gepunktete zu $B^2_\varphi/(1 + B^4_\varphi + B^2_r)$, die gestrichelte zur Abschätzung (5.15). Bei $C_\Omega < 0$ sind die B_0-Kurven für beide Quenching-Arten gleich.*

liegen bei den gewählten Parametern betragsmäßig unter $1°$. Größere Pitchwinkel, wie sie in Galaxien beobachtet werden (siehe Abschnitt 2.3), findet man nur für kleinere C_Ω. Tabelle 5.2 zeigt, wie sich die Pitchwinkel in Abhängigkeit von C_Ω verändern. Es ist ebenfalls ein Maß für die Verstärkung G des intergalaktischen Feldes angegeben. Die stationäre Lösung des Dynamos soll dabei nach 5 Gyr erreicht worden sein. Bei Annäherung $B_0 > B_0^{\rm crit} \to B_0^{\rm crit}$ werden die Einstellzeiten so lang, daß die resultierenden (höheren) Verstärkungsfaktoren keine physikalische Relevanz mehr besitzen, da für die Bildung von Galaxien Zeiten unter etwa 10 Gyr angenommen werden müssen.

Rechnet man die Felder des Falls $C_\alpha = 10$ und $C_\Omega = -10$ in galaktische Magnetfeldstärken nach Tabelle 3.17 um, so erhält man für das Startfeld 0.14 μG und für das vom Dynamo aufgebaute stationäre Feld 54 μG.

Eine Verringerung von C_Ω um den Faktor 10 gegenüber der Abschätzung von $C_\Omega = -50$ aus (3.45) in Kapitel 3 würde die großen beobachteten Pitchwinkel erklären. Allerdings nimmt mit abnehmendem C_Ω auch die Verstärkung des externen Magnetfeldes durch den „aufwachsenden“ Dynamo ab. Die Verstärkungsfaktoren sind ebenfalls in Tabelle 5.2 aufgelistet. Typischerweise liegen die intergalaktischen Feldstärken vier Größenordnungen unter denen galaktischer Magnetfelder (Vallée 1983), ein Verstärkungsfaktor von 10^4 wäre daher wünschenswert. Allerdings gibt es Überlegungen (Beech, 1985), nach denen das intergalaktische Feld nicht primordial ist, sondern aus den aus Galaxien und

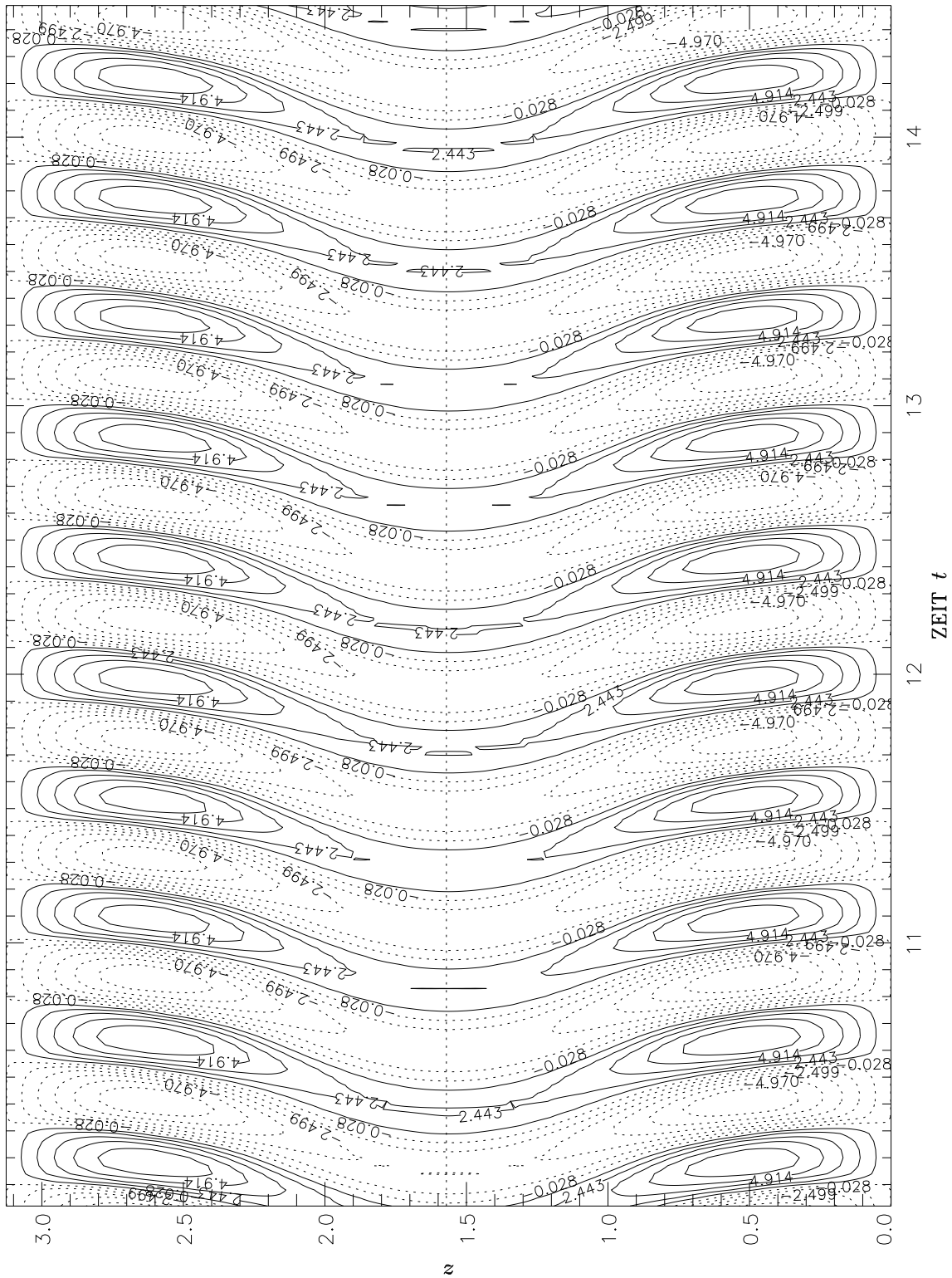

Abbildung 5.11: *Schmetterlingsdiagramm von* B_φ. $C_\alpha = 5$, $C_\Omega = 500$, $B_0 = 0.04$.

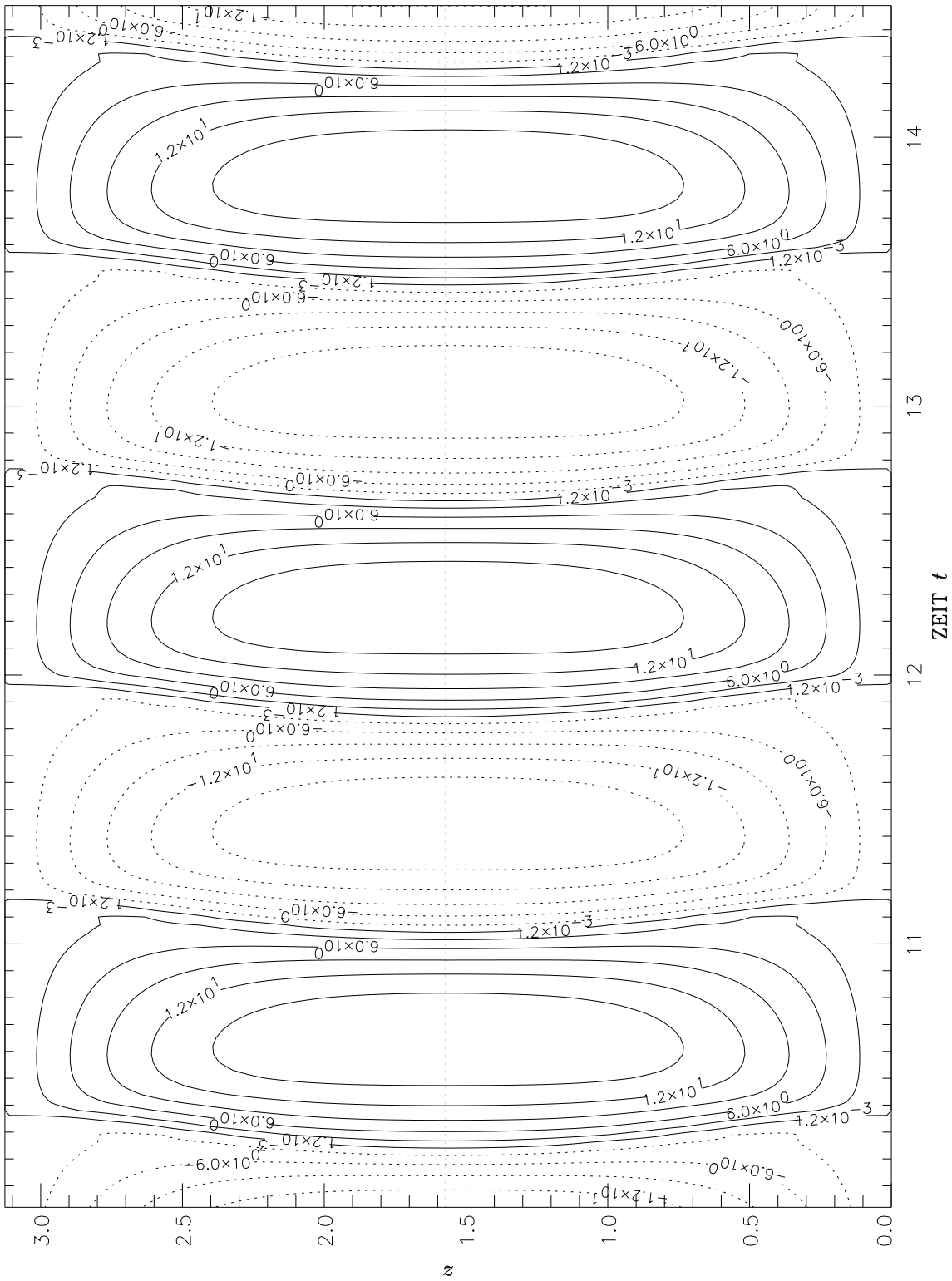

Abbildung 5.12: *Schmetterlingsdiagramm von* B_φ. $C_\alpha = 5$, $C_\Omega = 500$, $B_0 = 0.1$.

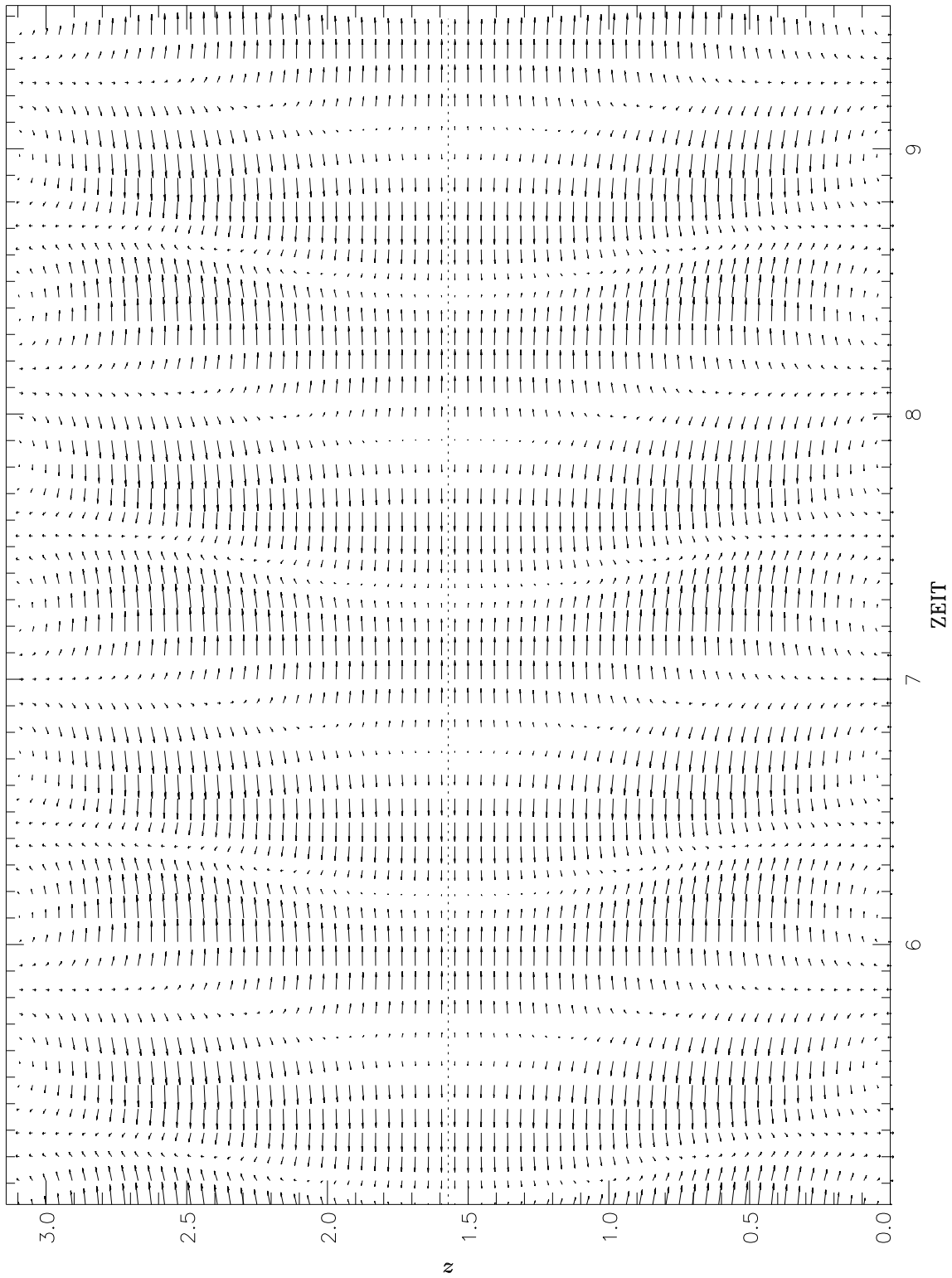

Abbildung 5.13: *Vektordiagramm von B_φ (x-Richtung) und B_r (y-Richtung).*

Tabelle 5.2: *Pitchwinkel p in Abhängigkeit von der differentiellen Rotation, ausgedrückt durch C_Ω ($C_\alpha = 10$). Die entsprechende stationäre Lösung soll nach 5 Gyr eingestellt sein. Erlaubt man längere Einstellzeiten, kann man größere Verstärkungen G erzielen, doch sind solche langen Zeiten unrealistisch.*

C_Ω	p	G ($T = 5$ Gyr)
-50	$-1°$	4840
-10	$-6°$	380
-5	$-12°$	62
-1	$-36°$	6

Galaxienhaufen austretenden Magnetfeldern resultiert, also nicht als Anfangsfeld für galaktische Magnetfelder herangezogen werden kann.

5.5 Zusammenfassung

Aus der Induktionsgleichung wurde ein vollständiger, eindimensionaler $\alpha^2\Omega$-Dynamo hergeleitet. Die Gleichungen benutzen den Mean-Field-Ansatz, daß sich turbulente Bewegungen des leitenden Mediums in einer zusätzlichen elektromotorischen Kraft niederschlagen, die in linearer Näherung parallel zum mittleren großskaligen Feld gerichtet ist. Dieser sogenannte α-Effekt wird in seiner Wirkung bei großen magnetischen Feldstärken begrenzt – frühere Untersuchungen haben Funktionen für dieses α-Quenching ermittelt, die für große Feldstärken verschwinden.

Es zeigt sich, daß die bisherigen Approximationen für vernachlässigbare differentielle Rotation (α^2-Dynamo) oder kleinen α-Effekt gegenüber der differentiellen Rotation ($\alpha\Omega$-Dynamo) in ihren Geltungsbereichen gerechtfertigt sind. Dennoch tritt im Bereich des $\alpha\Omega$-Dynamos eine zusätzliche, periodische Lösung auf, die neben der durch den $\alpha\Omega$-Dynamo approximierten Lösung koexistiert. Die Stärke der gewählten Anfangsbedingung entscheidet darüber, welche Lösung sich stabil einstellt. Die Abhängigkeit der Periode des Magnetfeldzyklus von C_α ist nur gering, so daß bereits die Kenntnis von C_Ω ein repräsentatives Modell eines differentiell rotierenden Objekts erlaubt.

Einer neuen Idee folgend wird signifikante Turbulenz erst durch Anwesenheit eines Magnetfeldes generiert. Es wurde eine quadratische Abhängigkeit des damit verbundenen α-Effekts von B für kleine Feldstärken vorgeschlagen. Es erhebt sich die Frage, ob trotz-

dem aus geringen Anfangsfeldstärken Magnetfelder beobachtbarer Amplituden aufgebaut werden können. Typische Verstärkungen liegen nach den vorliegenden Rechnungen in der Größenordnung 100. Einen wesentlichen Beitrag zur „Vorverstärkung“ des Anfangsfeldes liefert die differentielle Rotation des Objekts. Die beobachteten Periodendauern des Aktivitätszyklus und die Magnetfeldstärken können vom Modell gut wiedergegeben werden.

Kapitel 6

Programm

Der verwendete Programmcode wird hier am Beispiel des $\alpha^2\Omega$-Dynamos mit $B_{\rm tot}^2/(1+B_{\rm tot}^4)$-Quenching angegeben.

```
/*=================================================*/
/* alpha^2-Omega-Dynamo mit B^2/(1+B^4)-Quenching */
/*=================================================*/

#include <stdio.h>
#include <math.h>
#include <time.h>
#include "dynsxinit.c"
#include "xdrawpoints.c"

#define ngrid 201          /* Gitter in z-Richtung */
#define punkt 42           /* Ausgabe eines Punktes */
#define boptimum 0.0005    /* optimaler B-Schritt fuer Schrittweitenkontrolle */
#define maxdt 0.0001       /* maximaler Zeitschritt bei konstantem B */
#define b0 0.100           /* B0 als Anfang */
#define directory "/net/vortex/voru/rarlt/dyns1/"

 double a_alt[ngrid];
 double b_alt[ngrid],btot[ngrid];
 double inca[ngrid],incb[ngrid];
 double b2_neu[ngrid];
 double phi_neu[ngrid],psi[ngrid];
 double w_neu[ngrid];
 double alphapsi_neu[ngrid];
 double zval[ngrid],zsin[ngrid];

main()
{
 int n=ngrid-1;
 int savechain=1;          /* ob die ganze Kette ueber z gespeichert werden soll */
 int chainstep=300;        /* mit welcher Schrittweite das geschieht */
 int startchain=100000;    /* ab welchem Schritt das geschieht */
 int maxstep=1000000;      /* Anzahl der Integrationsschritte */
 int outputstep=50;    /* Schrittweite der ausgegebenen Zeitreihe */
 double dt=0.0001;         /* Anfangszeitschritt, praktisch bedeutungslos */
 double D=500;             /* C_Omega */
 double Dalpha=5.0;        /* C_alpha */
 double t=0.0;             /* Zeitvariable */
 char dir[128];
```

```
 double kf;
 double dz,dz2,dzdouble,dz2dt,dt2,b2,b2p1,batan;
 double da,dda,db,ddb,balt,bneu,bmax2,bmax,amax,amax2;
 double phi,phiz,phid,phitot;
 float outvar;
 int nseconds;
 int x1,y1,x2,y2;
 int xpixelb[ngrid],ypixelb[ngrid],xpixela[ngrid],ypixela[ngrid];
 int xpxbalt[ngrid],ypxbalt[ngrid],xpxaalt[ngrid],ypxaalt[ngrid];
 char ans;
 FILE *result_b;            /* Ergebnisausgabe: B-Feld */
 FILE *result_a;            /* Ergenbisausgabe: A-Feld */
 FILE *b_max;               /* Ergebnisausgabe: B_max  */
 FILE *times;               /* Ergebnisausgabe: Zeitschritte */
 FILE *param;               /* Parameterfile */
 FILE *chain_a;             /* Ergebnisfile: A-Feld auf ganzem Gitter */
 FILE *chain_b;             /* Ergebnisfile: B-Feld auf ganzem Gitter */
 int k,i,j;

/*-----------------------------------------------------*/
/* Festlegen der Anfangswerte                          */
/*-----------------------------------------------------*/
for(k=0;k<=n;k++) {
   zval[k]=(kf=k)/n*M_PI;
   zsin[k]=-sin(2*zval[k]);

   b_alt[k]=(sin(2.0*zval[k]+M_PI/4.0)-0.70710679)*b0;
   a_alt[k]=(0.5*(sin(2*zval[k]+M_PI/4.0)-sin(M_PI/4.0))
    -0.70710679*zval[k])*b0;
 }

/*-----------------------------------------------------*/
/* verschiedene Hilfsvariablen an den Raendern setzen   */
/*-----------------------------------------------------*/
 b_alt[0] = b_alt[n] = 0.0;
 b2_neu[0] = b2_neu[n]=0.0;
 btot[0] = btot[n] = 0.0;
 phi_neu[0]=phi_neu[n]=1.0;
 psi[0]=psi[n]=0.0;

 alphapsi_neu[0]=zsin[0];
 alphapsi_neu[n]=zsin[n];
 incb[0]=incb[n]=0.0;
 inca[0]=inca[n]=0.0;
 bmax=0.0;

 dz=M_PI/n;
 dz2=dz*dz;
 dzdouble=2*dz;

/*-------------------------------------------------------*/
/* Ausgabefiles oeffnen                                  */
/*-------------------------------------------------------*/
 strcpy(dir,directory);strcat(dir,"dyneta.bfeld");
 result_b=fopen(dir,"wb");
 strcpy(dir,directory);strcat(dir,"dyneta.afeld");
 result_a=fopen(dir,"wb");
 strcpy(dir,directory);strcat(dir,"dyneta.bmax");
 b_max   =fopen(dir,"wb");
 strcpy(dir,directory);strcat(dir,"dyneta.time");
 times   =fopen(dir,"wb");
 strcpy(dir,directory);strcat(dir,"dyneta.param");
```

```
 param   =fopen(dir,"w");
 strcpy(dir,directory);strcat(dir,"dyneta.chain_a");
 chain_a =fopen(dir,"w");
 strcpy(dir,directory);strcat(dir,"dyneta.chain_b");
 chain_b =fopen(dir,"w");
 fprintf(param,"%i\n",ngrid);
 fprintf(param,"%i\n",punkt);
 fprintf(param,"%i\n",nback);
 fprintf(param,"%i\n",maxstep);
 fprintf(param,"%f\n",D);
 fprintf(param,"%f\n",Dalpha);
 fprintf(param,"%f\n",dt);
 fclose(param);

 printf("Integriere %i Schritte\n",maxstep);
 printf("c_omega=%f\tc_alpha=%f\tB0=%f\n",D,Dalpha,b0);
 dynsxinit();
 nseconds=time(NULL);
 for(k=0;k<maxstep;k++) {

/*-----------------------------------------------------*/
/* Berechnung von Btot auf ganzem Gitter               */
/*-----------------------------------------------------*/
for(i=1;i<n;i++) {
da=(a_alt[i+1]-a_alt[i-1])/dzdouble;
b2_neu[i]=b_alt[i]*b_alt[i]+da*da;
btot[i]=sqrt(b2_neu[i]);
}


/*-----------------------------------------------------*/
/* Ausgabe von Zwischenwerten alle 500 Schritte       */
/*-----------------------------------------------------*/
if (k%500==0) {
   printf("%6i Schritte: B(t):%8.3f  Bmax:%8.3f dt:%10.8f  %8.3f\n"
,k,b_alt[punkt],bmax,dt,t);
fflush(stdout);
}

/*-----------------------------------------------------*/
/* Quenching-Funktion                                  */
/*-----------------------------------------------------*/
for(i=1;i<n;i++) {
b2=b2_neu[i];
psi[i]=b2/(1+b2*b2);
alphapsi_neu[i]=zsin[i]*psi[i];

}

for(i=1;i<n;i++) {

balt=b_alt[i];
da=(a_alt[i+1]-a_alt[i-1])/dzdouble;
db=(b_alt[i+1]-b_alt[i-1])/dzdouble;

/*-----------------------------------------------------*/
/* Implementation der Dynamogleichungen                */
/*-----------------------------------------------------*/
inca[i]=Dalpha*alphapsi_neu[i]*balt +
     (a_alt[i+1]-2*a_alt[i]+a_alt[i-1])/dz2;
incb[i]=-da*D-Dalpha*
     ((alphapsi_neu[i+1]-alphapsi_neu[i-1])/dzdouble*da+
```

```
     alphapsi_neu[i]*(a_alt[i+1]-2*a_alt[i]+a_alt[i-1])/dz2)
    +(b_alt[i-1]-2*balt+b_alt[i+1])/dz2;
}

/*-----------------------------------------------------*/
/* Bestimme Bmax, Amax und die maximalen Inkremente */
/*-----------------------------------------------------*/
db=0.0;
        da=0.0;
        bmax=0.0;
        amax=0.0;
        for(i=1;i<n;i++) {
                if ((bmax2=fabs(b_alt[i]))>bmax) bmax=bmax2;
                if ((amax2=fabs(a_alt[i]))>amax) amax=amax2;
        }
        for(i=1;i<n;i++) {
                ddb=fabs(incb[i]);
                if (ddb>db) db=ddb;
                dda=fabs(inca[i]);
                if (dda>da) da=dda;
        }

        da*=dt;db*=dt;
        da/=amax;db/=bmax;

/*-------------------------------------------------------*/
/* Bestimme optimalen Zeitschritt                        */
/*-------------------------------------------------------*/
        if (da>db) {
                if (da>boptimum) {while (da/2.0>boptimum)
  {dt/=2.0;da/=2.0;db/=2.0;}}
                else {while (da*2.0<boptimum)
  {dt*=2.0;da*=2.0;db*=2.0;}}}
        else {  if (db>boptimum) {while (db/2.0>boptimum)
  {dt/=2.0;db/=2.0;da/=2.0;}}
                else {while (db*2.0<boptimum)
  {dt*=2.0;db*=2.0;da*=2.0;}}
        }
        if (dt>maxdt) dt=maxdt;

/*-------------------------------------------------------*/
/* Ausgabe der Ergebnisse in Files                       */
/*-------------------------------------------------------*/
if (k%outputstep==0) {
outvar=b_alt[punkt];
fwrite(&outvar,4,1,result_b);
outvar=(a_alt[punkt]-a_alt[punkt-1])/dz;
fwrite(&outvar,4,1,result_a);
outvar=bmax;
fwrite(&outvar,4,1,b_max);
outvar=t;
fwrite(&outvar,4,1,times);
}
if ((k%20000==0)&&(k!=0)) {
  fflush(result_b);fflush(result_a);fflush(times);fflush(b_max);
}


/*-----------------------------------------------------*/
/* neue Felder A und B berechnen                      */
/*-----------------------------------------------------*/
t+=dt;
```

```
for(i=0;i<=n;i++) {
a_alt[i]=a_alt[i]+inca[i]*dt;
b_alt[i]=b_alt[i]+incb[i]*dt;
}
a_alt[0]=a_alt[1];
a_alt[n]=a_alt[n-1];

/*-----------------------------------------------------*/
/* Grafikausgabe der A- und B-Kette                    */
/*-----------------------------------------------------*/
if ((k%20)==0) {
  for (i=0;i<=n;i++) {
xpxbalt[i]=xpixelb[i];
ypxbalt[i]=ypixelb[i];
xpixelb[i]=1+x01+(int)(350.0/ngrid*i);
ypixelb[i]=y01+hoehe/2-(int)(b_alt[i]*10.0);
if ((ypixelb[i]<=y01)||(ypixelb[i]>=y01+hoehe)) {ypixelb[i]=-1;}
  }
  setblack();
  xdrawpoints_(&idp,&idw,&igc,&xpxbalt,&ypxbalt,&n);
  setwhite();
  xdrawpoints_(&idp,&idw,&igc,&xpixelb,&ypixelb,&n);
  for (i=0;i<=n;i++) {
xpxaalt[i]=xpixela[i];
ypxaalt[i]=ypixela[i];
xpixela[i]=1+x02+(int)(350.0/ngrid*i);
ypixela[i]=y02+hoehe/2-(int)(a_alt[i]*10.0);
  }
  setblack();
  xdrawpoints_(&idp,&idw,&igc,&xpxaalt,&ypxaalt,&n);
  setwhite();
  xdrawpoints_(&idp,&idw,&igc,&xpixela,&ypixela,&n);
}
if (k%1000==0) {
  drawdiagram();
}

/*-------------------------------------------------------*/
/* Ausgabe der A- und B-Ketten in Files fuer Schmetter-  */
/* lingsdiagramme                                        */
/*-------------------------------------------------------*/
if (savechain&&(k%chainstep==0)&&(k>=startchain)) {
for(i=0;i<=n;i++) {
fprintf(chain_a,"%f\n",a_alt[i]);
fprintf(chain_b,"%f\n",b_alt[i]);
}

}
  }
  printf("%i Sekunden\n",time(NULL)-nseconds);
  printf(dir);printf("\n");
  fclose(result_b);
  fclose(result_a);
  fclose(b_max);
  fclose(times);
  fclose(chain_a);
  fclose(chain_b);
}
```

Literaturverzeichnis

Kapitel 2

Amram P., Marcelin M., Balkowski C., Cayatte V., Sullivan III W.T., Le Coarer E., 1994: H_α velocity fields and rotation curves of galaxies in clusters. Part II. *Astron. Astrophys. Suppl. Ser.* **103**, 5.

Amram P., Balkowski C., Boulesteix J., Cayatte V., Marcelin M., Sullivan III W.T., 1996: The rotation curve of the cluster galaxy DC1842-62 No. 24 does not decrease. *Astron. Astrophys.* **310**, 737.

Beck R., 1993, In: F. Krause, K.-H. Rädler. G. Rüdiger (eds.): The Cosmic Dynamo. Kluwer, Dordrecht, 283.

Berkhuijsen E.M., Horellou C., Krause M., Neininger N., Poezd A.D., Shukurov A., 1996: Magnetic fields in the disk and halo of M51. *Astron. Astrophys.* **318**, 700.

Feynman J., Gabriel S.B., 1990: Period and phase of the 88-year solar cycle and the Maunder minimum – Evidence for a chaotic Sun. *Solar Physics* **127**, 393 (Sun in Time Conference, Tucson, AZ, 1989).

Gvaramadze V.V., Lominadze J.G., 1988: Gas rotation above the galactic disk. *Astrofizika* **28**, 99.

Harvey K.L., 1992: The cyclic behavior of solar activity. In: K.L. Harvey (ed.): The solar cycle. ASP Conf. Series Vol. 27, Astron. Soc. Pacific, San Francisco, 335.

Hasler K.-H., Zhugzhda Y.D., Lebedev N.I., Arlt R., Oraevsky V.N., 1997: Observation of solar low-l p-modes by the CORONAS-DIFOS experiment. *Astron. Astrophys.* , im Druck.

Hill F., 1992: On the interpretation of inversions of helioseismic rotational splitting measurements. In: K.L. Harvey (ed.): The solar cycle. ASP Conf. Series Vol. 27, Astron. Soc. Pacific, San Francisco, 286.

Hood L.L., Jirikowic J.L., 1990: A probable approx. 2400 year solar cycle in atmospheric delta C-14. In: NASA, Goddard Space Flight Center, Climate Impact of Solar Variability, 98.

Kim, 1989: Discovery of intergalactic radio emission in the Coma-A1367 supercluster. *Nature* **341**, 720.

Kopecky M., 1978: The 80-year cycle of sunspots. *L'Astronomie* **92**, 369.

Rüdiger G., 1989: Differential Rotation and Stellar Convection – Sun and Solar-type Stars. Akademie-Verlag, Berlin.

Saar S.H., Baliunas S.L., 1992: Recent advances in stellar cycle research. In: K.L. Harvey (ed.): The solar cycle. ASP Conf. Series Vol. 27, Astron. Soc. Pacific, San Francisco, 150.

Snodgrass H.B., Howard R., 1985: Torsional oscillations of low mode. *Solar Physics* **95**, 221.

Toutain T., Fröhlich C., 1992: Characteristics of solar p-modes: results from the IPHIR experiment. *Astron. Astrophys.* **257**, 287.

Unno W., Osaki Y., Ando H., Saio H., Shibahashi H., 1989: Nonradial oscillations of stars – Second Edition. Univ. of Tokyo Press.

Vallée J.P., 1983: Intergalactic and Galactic Magnetic Fields: An Updated List. *Astrophys. Letters* **23**, 85.

Vallée J.P., 1990: A possible excess rotation measure and large-scale magnetic fields in the Virgo supercluster of galaxies. *Astron. J.* **99**, 459.

Wielebinski R., Krause F., 1993: Magnetic fields in galaxies. *Astron. Astrophys. Rev.* **4**, 449.

Kapitel 3 und 5

Beck R., Brandenburg A., Moss D., Shukurov A., Sokoloff D., 1996: Galactic Magnetism: Recent Developments and Perspectives. *Ann. Rev. Astron. Astrophys.* **34**, 153.

Beech M., 1985: Is the intergalactic magnetic field primordial? *Astrophys. Space Sci.* **116**, 207.

Brandenburg A., Krause F., Meinel R., Moss D., Tuominen I., 1989: The stability of nonlinear dynamos and the limited role of kinematic growth rates. *Astron. Astrophys.* **213**, 411.

Krause F., Rädler K.-H., 1980: Mean-Field Magnetohydrodynamics and Dynamo Theory. Akademie-Verlag, Berlin.

Küker M., 1996: Theorie der differentiellen Rotation der Sonne und ihrer magnetfeldbedingten Torsionsschwingungen. *Dissertation*, Potsdam.

Meinel R., 1990: An exactly solvable global α^2-disk dynamo model. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **50**, 79.

Otmianowska-Mazur K., Rüdiger G., Elstner D., Arlt R., 1996: The turbulent EMF as a time series and the 'quality' of dynamo cycles. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* , im Druck.

Rüdiger G., 1974: The Influence of a Uniform Magnetic Field of Arbitrary Strength on Turbulence. *Astron. Nachr.* **295**, 275.

Rüdiger G., Arlt R., 1996: Cycle times and magnetic amplitudes in nonlinear 1D $\alpha^2\Omega$-dynamos. *Astron. Astrophys.* **316**, L17.

Rüdiger G., Kitchatinov L.L., 1993: Alpha-effect and alpha-quenching. *Astron. Astrophys.* **269**, 581.

Rüdiger G., Kitchatinov L.L., Küker M., Schultz M., 1994: Dynamo models with magnetic diffusivity-quenching. *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **78**, 247.

Steenbeck M., Krause F., Rädler K.-H., 1966: Berechnung der mittleren Lorentz-Feldstärke $\overline{\mathbf{v} \times \mathbf{B}}$ für ein elektrisch leitendes Medium in turbulenter, durch Coriolis-Kräfte beeinflußter Bewegung. *Zeitschr. Naturforsch.* **21a**, 369.

Stix M., 1972: Non-Linear Dynamo Waves *Astron. Astrophys.* **20**, 9.

Stix M., 1989: The Sun - An Introdution. Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, S. 47.

Vallée J.P., 1983: Intergalactic and Galactic Magnetic Fields: An Updated List. *Astrophys. Letters* **23**, 85.

Kapitel 4

Großmann Ch., Roos H.-G., 1992: Numerik partieller Differentialgleichungen. B.G. Teubner, Stuttgart.

Krzyżański M., 1971: Partial Differential Equations of Second Order. Vol. 1, Polish Scientific Publishers, Warschau.